Askey-Wilson 多項式・Askey-Wilson 代数・“Askey-Wilson 空間”？

柳田 伸太郎

2023/06/07

第 2 回「数理の香」コロキウム
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html

1. 超幾何直交多項式

1. 超幾何直交多項式
   1.1. Gauss の超幾何級数と古典直交多項式
   1.2. (一般) 超幾何級数と直交多項式
   1.3. 超幾何直交多項式の Askey 図式
   1.4. 補足・文献
2. q 超幾何直交多項式
3. Askey-Wilson 多項式
4. Askey-Wilson 代数
5. “Askey-Wilson 空間” ?

1.1. Gauss の超幾何函数と古典直交多項式 [1/3]

Gauss の超幾何級数 [Gauss (1813)]: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha, \ \beta \\ \gamma\end{matrix}; z\right] :=$$

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots.$$

- 色々な初等函数が F で表せる:

$$F(1, \beta; \beta; z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots : \text{幾何級数}.$$

$$F(\alpha, \beta; \beta; z) = (1-z)^{-\alpha}.$$

$$\log(1+z) = zF(1, 1; 2; -z).$$

$$\sin^{-1} z = zF(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; z^2).$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; z^2)$$

- $(\alpha)_i := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1)$,

$$F(\alpha, \beta; \gamma, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i(\beta)_i}{(1)_i(\gamma)_i} z^i.$$

1.1. Gauss の超幾何函数と古典直交多項式 [2/3]

超幾何級数 $F(\alpha,\beta;\gamma,z) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i(\beta)_i}{(1)_i(\gamma)_i} z^i$ の諸性質. $\quad (a)_i = \prod_{n=0}^{i-1}(a+n)$

- 収束性: $|z| < 1$ で絶対収束 $\to$ Gauss の超幾何函数.
- 和公式 c.f. [Gasper-Rahman]
  - 二項定理 $F(\alpha,\beta;\beta;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{i} z^i = (1-z)^{-\alpha}$.
  - Chu (1303) - Vandermonde (1772): $F(-n,\beta;\gamma;1) = \dfrac{(\beta-\gamma)_n}{(\gamma)_n}$.

    $\beta = -b$, $\gamma = a+n+1$ で $\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{n-i}\binom{b}{i} = \binom{a+b}{n}$ と同値.
  - Gauss の和公式 $F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$.
- 変換公式 (パラメータの置換, Euler/Pfaff-Kummer/...).
- 超幾何微分方程式: 複素領域の常微分方程式 c.f. [高野]

  $$[z(1-z)\partial_z^2 + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\partial_z - \alpha\beta]F(z) = 0.$$

  確定特異点; 級数解構成に関する Frobenius の方法;

  解の積分表示; モノドロミー表現; Riemann-Hilbert 問題; $\cdots$

1.1. Gauss の超幾何函数と古典直交多項式 [3/3]

$\alpha = -n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ なら z の n 次多項式: Gauss 超幾何多項式.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-n)_i(\beta)_i}{(1)_i(\gamma)_i} z^i, \quad (\alpha)_i := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1). $$

古典的な直交多項式は超幾何多項式で表せる. c.f. [Koekoek-Lesky-Swarttouw]

- Legendre 多項式 (1782): $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$,

$$ P_n(x) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n+1\\ 1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right]. $$

- 第 1・2 種 Chebyshef 多項式 (1857): $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\mp 1/2}\,dx$,

$$ T_n(x) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n\\ 1/2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right], \quad U_n(x) \propto {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n+2\\ 3/2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right]. $$

- Gegenbauer (超球) 多項式 (1875): $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx$,

$$ C_n^{\lambda}(x) \propto {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n+2\lambda\\ \lambda+1/2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right]. $$

1.2. (一般) 超幾何級数と直交多項式 [1/3]

- Jacobi 多項式 (1859): $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \propto {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix};\frac{1-x}{2}\right].$$

Gauss の超幾何函数

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha,\ \beta \\ \gamma \end{matrix};z\right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i(\beta)_i}{(1)_i(\gamma)_i} z^i, \quad (a)_i := a(a+1)\cdots(a+i-1)$$

の一般化: (一般) 超幾何級数

$${}_rF_s\left[\begin{matrix} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r \\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s \end{matrix};z\right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i\cdots(\alpha_r)_i}{(1)_i(\beta_1)_i(\beta_2)_i\cdots(\beta_s)_i} z^i.$$

- 分子パラメータの一つが負整数なら z の多項式: 超幾何多項式.

1.2. (一般) 超幾何級数と直交多項式 [2/3]

"不確定型" 古典直交多項式と超幾何級数

- Laguerre 多項式 (1878): $\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}x^\alpha\,dx$.

$$L_n^{(\alpha)}(x) \propto {}_1F_1\left[\begin{matrix}-n\\ \alpha+1\end{matrix};x\right].$$

- Hermite 多項式 (1864; 1810 by Laplace): $\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$

$$H_n(x) \propto {}_2F_0\left[\begin{matrix}-n/2, \ -(n-1)/2\\ -\end{matrix};-\frac{1}{x^2}\right].$$

1.2. (一般) 超幾何級数と直交多項式 [3/3]

連続直交多項式系の分類理論 [S. Bochner (1929)] c.f. [KLS, Chap. 4]

- (2 階微分作用素の固有値問題)
  $$[\varphi(x)d_x^2 + \psi(x)d_x]y_n(x) = \lambda_n y_n(x),\ \lambda_n \in \mathbb{C}.$$
  - $y_n(x)$ が n 次多項式なら, 固有方程式は次の形:
    $$[(ex^2 + 2fx + g)d_x^2 + (2\varepsilon x + \gamma)d_x]y_n = n(2(n-1) + 2\varepsilon)y_n. \quad (*)$$
  - $\exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$, $\forall n = 0, 1, \ldots, N$, 固有多項式 $y_n(x)$ が一意存在.
  - $(w\varphi)' = w\psi$ なる $w(x)$ で, $(*)$ が $(w\varphi y_n')' = \lambda_n w y_n$ と書ける.
- (3 項間漸化式を満たす多項式系の直交性)
  固有多項式系 $\{y_n(x)\}_{n=0}^N$ の存在から
  - $\exists$ 3 項間漸化式 $y_{n+1}(x) = (x - c_n)y_n(x) - d_n y_{n-1}(x),\ \ c_n, d_n \in \mathbb{C}$.
  - $\exists!$ 多項式空間上の線形汎函数 Λ で $m \neq n$ なら $\Lambda(y_m y_n) = 0$.
    更に, Λ が正定値 $\iff c_n \in \mathbb{R},\ d_n \in \mathbb{R}_{>0}$.
  - $\langle f, g\rangle := \Lambda(fg) = \int_I f(x)g(x)w(x)\,dx$ が正定値で, y_n 達は直交.

$\Longrightarrow$ 直交多項式系が分類できて, 全て超幾何直交多項式.

- $(N = \infty)$ Hermite, Laguerre, Jacobi.
- $(N < \infty)$ Bessel, pseudo-Bessel.

1.3. 超幾何直交多項式の Askey 図式 [1/4]

離散直交多項式系の分類理論 [W. Hahn (1949)]　　c.f. [KLS, Chap. 5,6]

- 2 階微分作用素の代わりに 2 階差分作用素を考える:
  $[\varphi(x)\Delta_x^2 + \psi(x)\Delta_x]y_n(x) = \lambda_n y_n(x+1),\ (\Delta_x f)(x) := f(x+1) - f(x).$
  - 連続の時と同様に, 差分作用素の形が決まり,
    それから固有多項式系 $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ や 3 項間漸化式が決まる.
  - 固有方程式は $\Delta(w(S^{-1}\varphi)) = (Sw)\psi$, $(Sf)(x) = f(x+1)$ を満たす
    $w(x)$ を用いて次の形に書き直せる:
    $$\Delta(w(S^{-1}\varphi)(\Delta y_n)) = \lambda_n S(wy_n).$$
  - 対応する内積は $N = \infty$ なら $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,dx$,
    $N < \infty$ なら $\langle f, g\rangle = \sum_{x=0}^{N} f(x)g(x)w(x)$.

$\Longrightarrow$ 直交多項式系が分類できて, やはり超幾何直交多項式.

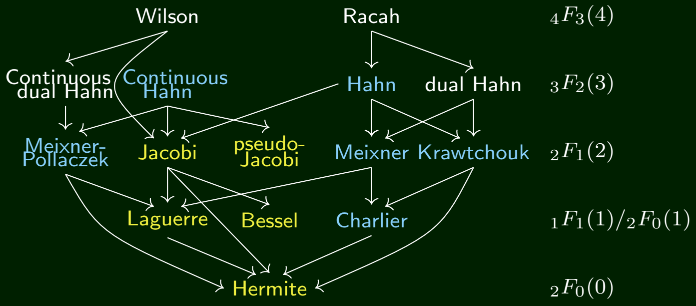
- $(N = \infty)$ Charlier, Meixner, Meixner-Pollaczek, continuous Hahn.
- $(N < \infty)$ Krawtchouk, Hahn.

1.3. 超幾何直交多項式の Askey 図式 [2/4]

- Hahn 多項式 (1949): $\sum_{x=0}^{N} \binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x} Q_m(x)Q_n(x) \propto \delta_{m,n}$,

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1,\ -x \\ \alpha+1,\ -N \end{matrix};1\right], \quad n = 0,1,\ldots,N.$$

Bochner 理論と Hahn 理論の統合・拡張 [Askey-Wilson (1985)]:



1.3. 超幾何直交多項式の Askey 図式 [3/4]

Askey と Wilson の理論 c.f. [KLS, Chap. 7,8]

- 連続直交函数系である Wilson 多項式 W_n $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と離散直交函数系である Racah 多項式 R_n $(n = 0, 1, \ldots, N)$ を導入し, それらのパラメータ特殊化や変数の退化極限で既知の超幾何直交多項式が全て復元できることを示した.
- また, 従来理論では "変数 x の微分・差分方程式" を考えていたが, 代わりに "変数 $\lambda(x) = x(x + u)$ の方程式" を考え, それに関する分類理論を展開した. $\rightarrow$ 全て $({}_4F_3$ 以下の$)$ 超幾何多項式で書ける.

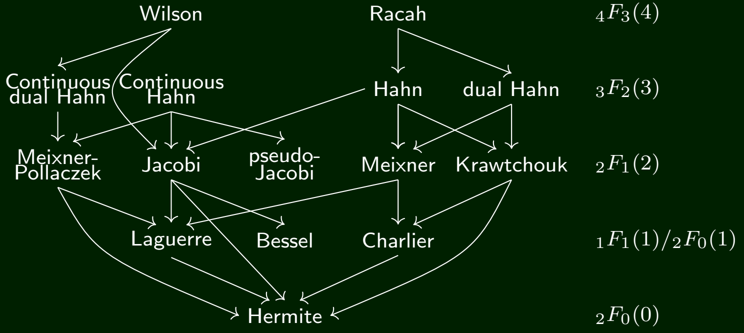
後者の分類に現れる超幾何多項式を頂点とし, 前者の特殊化・極限操作を矢とする箙が Askey 図式 (Askey scheme) [KLS, p.183].

1.3. 超幾何直交多項式の Askey 図式 [4/4]

$$W_n(x^2;a,b,c,d) \propto {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,\ n+a+b+c+d-1,\ a+ix,\ a-ix\\ a+b,\ a+c,\ a+d\end{matrix};1\right],$$

$$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta) = {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ -x,\ x+\gamma+\delta+1\\ \alpha+1,\ \beta+\delta+1,\ \gamma+1\end{matrix};1\right].$$

R_n: $n=0,1,\ldots,N$, $\lambda(x)=x(x+\gamma+\delta+1)$; $\alpha+1$ or $\beta+\delta+1$ or $\gamma+1=-N$.



1.4. 補足・文献 [1/2]

補足

- Racah 多項式で表せる離散確率分布 [林正人-洞彰人-S.Y. (2021, preprint)]
  - $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$ s.t. $0 \leq 2m, k, l \leq n$, $M := m - l, N := n - m - k + l \geq 0$.

$$p(x) := \binom{n-k}{m-l} \frac{\binom{n}{x}}{\binom{n}{m}} \frac{n-2x+1}{n-x+1} {}_4F_3\left[\begin{matrix} -x, \ x-n-1, \ -M, \ -N \\ -m, \ m-n, \ -M-N \end{matrix}; 1\right]$$

  が $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ の離散確率分布 $P_{n,m,k,l}$ を与える.

  - 累積分布函数も超幾何多項式で表せる (和公式の一種):

$$P_{n,m,k,l}[X \leq x] = \binom{n-k}{m-l} \frac{\binom{n}{x}}{\binom{n}{m}} {}_4F_3\left[\begin{matrix} -x, \ x-n, \ -M, \ -N \\ -m, \ m-n, \ -M-N \end{matrix}; 1\right].$$

1.4. 補足・文献 [2/2]

参考文献

- [Gasper-Rahman] G. Gasper, M. Rahman,
  "Basic Hypergeometric Series", 2nd ed.,
  Encyclopedia of math. and its appl., 96, Cambridge Univ. Press., 2004.
- [Koekoek-Lesky-Swarttouw] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw,
  "Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues",
  Springer Monographs in Math., Springer, 2010.
- [高野] 高野恭一, "常微分方程式", 新数学講座 6, 朝倉書店, 1994.
- 青本和彦, "直交多項式入門", 数学書房, 2013.
- R.-P. Holzapfel, A. M. Uludağ, M. Yoshida ed.,
  "Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions",
  Lecture Notes of CIMPA Summer School held at Galatasaray Univ., Istanbul,
  2005, Progress in Math., 260, Birkhäuser, 2007.
  超幾何函数と数論・代数幾何に関する講演録.

2. 超幾何直交多項式

1. 超幾何直交多項式
2. q 超幾何直交多項式
   2.1. Heine の q 超幾何函数
   2.2. 一般 q 超幾何級数と q 直交多項式
   2.3. q-Askey 図式
   2.4. 練習問題・補足・文献
3. Askey-Wilson 多項式
4. Askey-Wilson 代数
5. “Askey-Wilson 空間” ?

2.1. Heine の q 超幾何函数 [1/2]

Gauss の超幾何級数の q 類似 [E. Heine (1846,47,78)]:

$$1 + \frac{1-q^\alpha}{1-q}\frac{1-q^\beta}{1-q^\gamma}z + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)}\frac{(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}z^2 + \cdots .$$

$q \to 1$ で

$$\longrightarrow 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};z\right].$$

現在では, 乗法的パラメータ $a = q^\alpha, b = q^\beta, c = q^\gamma$ を使って,

$$\phi(a,b;c;q,z) = {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};q,z\right] := \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(b;q)_i}{(c;q)_i}z^i.$$

但し $(a;q)_i := (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{i-1}a)$.

2.1. Heine の q 超幾何級数 [2/2]

Heine の q 超幾何級数: $a, b, c, q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $c \notin q^{\mathbb{Z}}$,

$$\phi(a, b; c; q, z) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a, b; q)_i}{(q, c; q)_i} z^i, \quad (a, b; q)_i := (a; q)_i (b; q)_i.$$

Gauss の超幾何級数と類似の性質 c.f. [Gasper-Rahman]

- 収束性: $|z| < 1$ で絶対収束 $\to$ Heine の q 超幾何函数.
- 和公式: $(z; q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i z)$.
  - q 二項定理 $\phi(a, b; b; q, z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a; q)_i}{(q; q)_i} z^i = \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty}$.

    $a = q^\alpha$, $q \to 1$ で二項定理 $F(\alpha, \beta; \beta; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i}{(1)_i} z^i = (1 - z)^{-\alpha}$.
  - Heine の和公式 $\phi(a, b; c; q, c/ab) = \dfrac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}$.

    $a = q^\alpha, \ldots$, $q \to 1$ で Gauss の和公式 $F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$.
- 変換公式: Heine/Jackson/... $(\xrightarrow{q \to 1}$ Euler/Pfaff/...$)$.
- 2 階 q 差分方程式の解 $\to$ q 差分 Riemann-Hilbert 問題.

2.2. 一般 q 超幾何級数と q 超幾何多項式 [1/2]

一般 q 超幾何級数: $(a;q)_i = \prod_{n=0}^{i-1}(1-aq^n)$

$$ {}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, & \dots, & a_r \\ b_1, & \dots, & b_s \end{matrix}; q, z\right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_r;q)_i}{(q,b_1,\dots,b_s;q)_i}\left[(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\right]^{1+s-r} z^i. $$

$a_1 = q^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ なら z の n 次多項式.

古典直交多項式の q 類似: q 超幾何直交多項式 c.f. [KLS, Part II]

- 連続 q-Hermite 多項式: $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{\left|(e^{2i\theta};q)_\infty\right|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

$$ H_n(x|q) = e^{in\theta}{}_2\phi_0\left[\begin{matrix} q^{-n}, & 0 \\ & - \end{matrix}; q, q^n e^{-2i\theta}\right], \quad x = \cos\theta. $$

$x = y\sqrt{(1-q)/2}$, $q \to 1$ で $H_n(x|q) \to H_n(y) \propto {}_2F_0\left[\begin{matrix} -n/2, & -(n-1)/2 \\ & - \end{matrix}; -\frac{1}{y^2}\right]$,
内積 $\to \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y)e^{-y^2}\,dy$.

2.2. 一般 q 超幾何級数と q 超幾何多項式 [2/2]

q 超幾何直交多項式: c.f. [KLS, Part II]

- 連続 q-Laguerre 多項式: $x = \cos\theta$,
$$P_n^{(\alpha)}(x|q) \propto e^{\sqrt{-1}n\theta}\,{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} q^{-n},\ q^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}e^{i\theta} \\ q^{-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}-n}e^{i\theta} \end{matrix}; q, qe^{-i\theta}\right].$$
$x = q^y$, $q \to 1$ で $P_n^{(\alpha)}(x|q) \to L_n^{(\alpha)}(y) \propto {}_1F_1\left[\begin{matrix} -n \\ \alpha+1 \end{matrix}; y\right]$.
- 連続 q-Jacobi 多項式: $x = \cos\theta$,
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x|q) \propto {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n},\ q^{n+\alpha+\beta+1},\ q^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}e^{i\theta},\ q^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}e^{-i\theta} \\ q^{\alpha+1},\ \ -q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)},\ \ -q^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)} \end{matrix}; q, q\right].$$
$q \to 1$ で $P_n^{(\alpha,\beta)}(x|q) \to P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \propto {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right]$

q 超幾何直交多項式の分類理論 [Askey-Wilson (1985)]:

- $q = 1$ の場合と同様に, 連続型と離散型の "2 山" に分かれる.
- 連続型の親玉 (Askey-Wilson 多項式) と離散型の親玉 (q-Racah 多項式) があって, 他の q 超幾何直交多項式はその特殊化・退化極限で得られる.

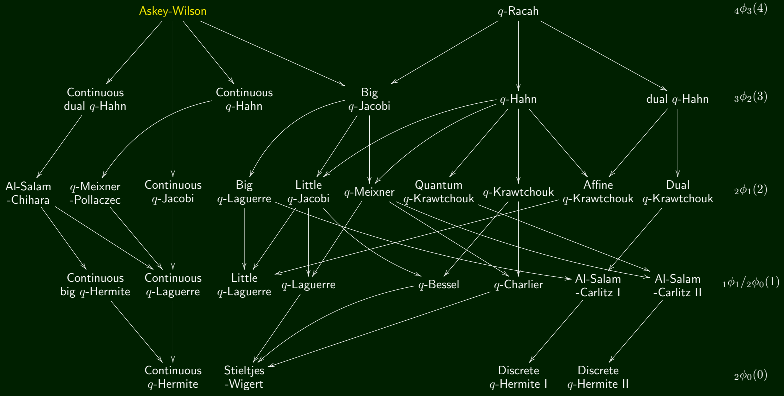
2.3. q-Askey 図式 [1/2]

q 超幾何直交多項式の分類理論 [Askey-Wilson]: c.f. [KLS, Part II]

- 2 階 q 差分作用素の固有値問題
  $[\varphi(x)A_{q,\omega}^2 + \psi(x)A_{q,\omega}]y_n(x) = \lambda_n y_n(qx+\omega)$,
  $(A_{q,\omega}p)(x) := \frac{p(qx+\omega)-p(x)}{qx+\omega-x}$, $0 < q < 1$, $\omega \in \mathbb{R}$. Hahn の q 作用素
  - $q = 1$ の時と同様に, 差分作用素の形が決まり,
    それから固有多項式系 $\{y_n\}_{n=0}^N$ や 3 項間漸化式が決まる.
  - 固有方程式は $A_{q,\omega}(w(T^{-1}\varphi)) = (Tw)\psi$, $(Tf)(x) := f(qx+\omega)$
    を満たす $w(x)$ を用いて次の形に書き直せる:
    $$A_{q,\omega}(w(T^{-1}\varphi)(A_{q,\omega}y_n)) = \lambda_n T(wy_n).$$
  - 内積は $N = \infty$ なら Jackson 積分 $\int_I f(x)g(x)w(x)\,d_qx$,
    $\int_0^t f(x)d_qx := t(1-q)\sum_{n=0}^\infty f(q^nt)q^n$, $t > 0$.
    $N < \infty$ なら $\sum_{\nu=0}^N f(x_\nu)g(x_\nu)w(x_\nu)((q-1)x_\nu+\omega)$, $x_{\nu+1} = qx_\nu+\omega$.
  - $q = 1$ の場合と同様に, $\lambda(x) = x(x+u)$ に関する q 差分方程式も考える.
- まとめたのが次頁の q-Askey 図式 [KLS, p.413].

2.3. q-Askey 図式 [2/2]

- Askey-Wilson 多項式: $x = \cos\theta$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
$$p_n(x; a, b, c, d|q) \propto {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n},\ q^{n-1}abcd,\ ae^{i\theta},\ ae^{-i\theta} \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q, q\right].$$
- q-Racah 多項式: $\mu(x) = q^{-x} + q^{x+1}\gamma\delta$, $n = 0, 1, \ldots, N$,
$$R_n(\mu(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta|q) \propto {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n},\ q^{n+1}\alpha\beta,\ q^{-x},\ q^{x+1}\gamma\delta \\ q\alpha,\ q\beta\delta,\ q\gamma \end{matrix}; q, q\right]$$



2.4. 練習問題・補足・文献 [1/2]

練習問題

- q 整数, q 階乗, q 二項係数を以下で定める:
$[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, $[n]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$, $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[m]_q!\,[n-m]_q!}$.
射影空間や Grassmann 多様体の有理数体 $\mathbb{F}_q$ での有理点の数を,
これらの q-number を用いて表せ.
- Chu-Vandermonde の公式 $F(-n, \beta; \gamma; 1) = \frac{(\beta-\gamma)_n}{(\gamma)_n}$ の q 類似は?
$\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{n-i}\binom{b}{i} = \binom{a+b}{n}$ の q 類似は? その解釈は? [Gasper-Rahman, (1.5.2)]

補足

- Hahn の q 作用素 $(A_{q,\omega}p)(x) := \frac{p(qx+\omega)-p(x)}{qx+\omega-x}$, $0 < q < 1$, $\omega \in \mathbb{R}$
は $\omega = 0$, $q \to 1$ で微分作用素 $\frac{d}{dx}$ に退化. しかし $A_{1,0}$ は意味を持たない....
- "多項式空間上の線形作用素 $A_{q,\omega}$ であって変形 Leibniz 則

$$(A_{q,\omega}(p_1p_2))(x) = (A_{q,\omega}p_1)(x) \cdot p_2(x) + p_1(qx+\omega) \cdot (A_{q,\omega}p_2)(x)$$

及び $A_{q,\omega}(1) = 0$, $A_{q,\omega}(x) = 1$ を満たすもの" は一意に定まり, $(q,\omega) \neq (1,0)$ なら元の Hahn の q 作用素と, $(q,\omega) = (1,0)$ なら微分作用素と一致. [KLS, 2.1]

2.4. 練習問題・補足・文献 [2/2]

補足

- [林-洞-Y.] の離散確率分布の q 類似: $0<q<1$, $n,m,k,l\in\mathbb{Z}$ s.t. $0\le 2m,k,l\le n$, $M:=m-l, N:=n-m-k+l\ge 0$.

$$p(x|q):=\begin{bmatrix}n-k\\m-l\end{bmatrix}_q\frac{\begin{bmatrix}n\\x\end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q}q^x\frac{[n-2x+1]_q}{[n-x+1]_q}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-x},\ q^{x-n-1},\ q^{-M},\ q^{-N}\\q^{-m},\ q^{m-n},\ q^{-M-N}\end{matrix};q,q\right]$$

は $x\in\{0,1,\ldots,n\}$ の離散確率分布を定める. 更に累積分布函数は

$$\sum_{u=0}^{x}p(x|q)=\begin{bmatrix}n-k\\m-l\end{bmatrix}_q\frac{\begin{bmatrix}n\\x\end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-x},\ q^{x-n},\ q^{-M},\ q^{-N}\\q^{-m},\ q^{m-n},\ q^{-M-N}\end{matrix};q,q\right].$$

参考文献

[GR] G. Gasper, M. Rahman, “Basic Hypergeometric Series”, 2nd ed., Encyclopedia of math. and its appl., 96, Cambridge Univ. Press., 2004.

[KLS] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, “Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues”, Springer Monographs in Math., Springer, 2010.

3. Askey-Wilson 多項式

1. 超幾何直交多項式
2. q 超幾何直交多項式
3. Askey-Wilson 多項式
   3.1. Askey-Wilson 多項式
   3.2. 多変数化: Koornwinder 多項式
   3.3. Macdonald 対称多項式
   3.4. Macdonald-Cherednik 理論
   3.5. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィン Hecke 環と Askey-Wilson 多項式
   3.6. 補足・課題・文献
4. Askey-Wilson 代数
5. “Askey-Wilson 空間” ?

3.1. Askey-Wilson 多項式 [1/2]

Askey-Wilson 多項式 (1985): $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\nu(x) := (x + x^{-1})/2$, c.f. [KLS, 14.1]

$$p_l(\nu(x); a, b, c, d|q) := \frac{(ab, ac, ad; q)_l}{a^l} {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ ax,\ a/x \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q, q\right].$$

$${}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \\ b_1,\ b_2,\ b_3 \end{matrix}; q, z\right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, a_3, a_4; q)_i}{(q, b_1, b_2, b_3; q)_i} z^i, \quad (q; a)_i = \prod_{j=0}^{i}(1 - q^j a).$$

特殊化: 連続 q-Jacobi 多項式 $P_l^{(\alpha,\beta)}(y|q) \propto {}_4\phi_3(\cdots; q, q)$ は次で得られる:

$$p_l(y; q^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}, q^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{4}}, -q^{\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{4}}, -q^{\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}}|q) \propto P_l^{(\alpha,\beta)}(y|q).$$

連続 q-Hahn, 連続双対 q-Hahn, Big q-Jacobi にも特殊化. $q \to 1$ で Wilson 多項式に退化.

直交性: $x = e^{i\theta}$, $y = \nu(x) = \cos\theta$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} p_l(y)p_m(y)\frac{w(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = h_l\delta_{l,m}, \quad w(y) := \left|\frac{(x^2; q)_\infty}{(ax, bx, cx, dx; q)_\infty}\right|^2,$$

$$h_l = \frac{(q^{l-1}abcd; q)_l (q^{2l}abcd; q)_\infty}{(q^{l+1}, q^l ab, q^l ac, q^l bc, q^l bd, q^l cd; q)_\infty}.$$

3.1. Askey-Wilson 多項式 [2/2]

Askey-Wilson 多項式: $\nu(z) := (z+z^{-1})/2$, c.f. [青本, 16 章]

$$p_l(\nu(z);a,b,c,d|q) := \frac{(ab,ac,ad;q)_l}{a^l}\,{}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ az,\ az^{-1} \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix};q,q\right].$$

- 変数対称性: $z \leftrightarrow z^{-1}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}$ 作用で p_n は不変.
- 2 階 q 差分作用素の固有函数: $(\Phi p_l)(z) = c_l p_l(z)$,

$$\Phi := \Phi^+(z)(T_{q,z}-1) + \Phi^+(z^{-1})(T_{q,z}^{-1}-1), \quad (T_{q,z}f)(z) = f(qz),$$

$$\Phi^+(z) := \frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)}{(1-z^2)(1-qz^2)}, \quad c_l := (q^{-l}-1)(1-q^{l-1}abcd).$$

- スペクトル対称性: $\zeta_l \leftrightarrow \zeta_l^{-1}$ の $\{\pm 1\}$ 作用で c_l, p_l は不変.
  $c_l = -(1-a^*\zeta_l)(1-a^*\zeta_l^{-1})$, $a^* := \sqrt{abcd/q}$, $\zeta_l := q^{-l}/a^*$,
  $p_l \propto p(z;\zeta_l)$, $p(z;\zeta) := {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a^*\zeta,\ a^*/\zeta,\ az,\ a/z \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix};q,q\right]$.
- 双スペクトル性 (双対性): $z \leftrightarrow \zeta$ の対称性. 補足参照.

3.2. Koornwinder 多項式 [1/4]

Koornwinder 多項式 (1992): Askey-Wilson 多項式の n 変数版.

- $\mathbb{C}[x^{\pm1}] = \mathbb{C}[x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}]$: n 変数 Laurent 多項式環.
  - $\mathbb{C}[x^{\pm1}] \cong \mathbb{C}P$: 可換群 $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$ の群環 (P: C_n 型ウェイト格子).
    $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ ($\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \epsilon_k \in P$: ウェイト).
- $W := \langle \lambda_k \mapsto -\lambda_k, \text{番号置換} \rangle \curvearrowright P, \mathbb{C}[x^{\pm1}]$.
  $W \cong \{\pm1\}^n \rtimes S_n$: BC_n 型 Weyl 群.
- $\mathbb{C}[x^{\pm1}]^W := \{f \in \mathbb{C}[x^{\pm1}] \mid w(f) = f, \forall w \in W\}$: W 不変式環.
  $\mathbb{C}[x^{\pm1}]^W = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{C}m_\lambda(x)$,
  $P_+ := \{\lambda \in P \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$: 優整ウェイト,
  $m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W\lambda} x^\mu$: orbit sum.
  - $n = 1$: $\mathbb{C}[x_1^{\pm1}]^{\{\pm1\}} = \mathbb{C}[x_1 + x_1^{-1}] = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}m_l$, $m_l = x_1^l + x_1^{-l}$.

<u>定理</u> [Koornwinder]
(a, b, c, d, t), q: generic な複素数.
次の (1) と (2), または (1) と (3) を満たす W 不変式環 $\mathbb{C}[x^{\pm1}]^W$ の基底
$\{P_\lambda(x) = P_\lambda(x; a, b, c, d, t|q) \mid \lambda \in P_+\}$ が一意に存在する.

3.2. Koornwinder 多項式 [2/4]

定理 [Koornwinder]
(a,b,c,d,t), q: generic な複素数. 次の (1) と (2) を満たす $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底 $\{P_\lambda(x) \mid \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \epsilon_k \in P_+\}$ が一意に存在する.

(1) 半順序に関する三角性: $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(x)$.
但し $\lambda \geq \mu$ はドミナンス順序:
$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{i=1}^n \mu_k$ かつ $\lambda_1 \geq \mu_1,\ \lambda_1+\lambda_2 \geq \mu_1+\mu_2, \ldots$.

(2) q 差分作用素の固有函数: $DP_\lambda(x) = c_\lambda P_\lambda(x)$,

$$D := \sum_{k=1}^n \Phi_k^+(x)(T_{q,x_k}-1) + \sum_{k=1}^n \Phi_k^+(x^{-1})(T_{q,x_k}^{-1}-1),$$

$$\Phi_k^+(x) := \frac{(1-ax_k)(1-bx_k)(1-cx_k)(1-dx_k)}{(1-x_k^2)(1-qx_k^2)} \prod_{j\neq k} \frac{(tx_k-x_j)(1-tx_kx_j)}{(x_k-x_j)(1-x_kx_j)},$$

$$(T_{q,x_k}f)(x) := f(x_1,\ldots,qx_k,\ldots,x_n),$$

$$c_\lambda = \sum_{k=1}^n (q^{-\lambda_k}-1)(t^{k-1}-q^{\lambda_k-1}t^{2n-k-1}abcd).$$

定理 [Koornwinder]
(a,b,c,d,t): 絶対値 1 未満の実数, q: $0<q<1$.
次の (1) と (3) を満たす $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底 $\{P_\lambda(x) \mid \lambda \in P_+\}$ が一意に存在.

(1) 半順序に関する三角性: $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(x)$.
但し $\lambda \geq \mu$ はドミナンス順序:
$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{i=1}^n \mu_k$ かつ $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_1+\lambda_2 \geq \mu_1+\mu_2$, $\ldots$.

(3) 直交性: $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle = 0$ ($\lambda,\mu \in P_+$, $\lambda \neq \mu$),

$$\langle f,g\rangle := \frac{1}{|W|}\int_T \overline{f(x)}g(x)\left|\Delta^+(x)\right|^2 \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n},$$

$$T := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\},$$

$$\Delta^+(x) := \prod_{k=1}^n \frac{(x_k^2;q)_\infty}{(ax_k,bx_k,cx_k,dx_k;q)_\infty}\prod_{1\leq j<k\leq n}\frac{(x_j/x_k,x_jx_k;q)_\infty}{(tx_j/x_k,tx_jx_k;q)_\infty}.$$

3.2. 多変数化: Koornwinder 多項式 [4/4]

Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; a, b, c, d, t|q)$ の性質:

- $n = 1$ の場合は Askey-Wilson 多項式と一致.
- van Dijen (1995) の q 差分作用素可換族 $D_x^{(1)} = D, D_x^{(2)}, D_x^{(3)}, \ldots,$

$$D_x^{(r)} = \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\},|J|=r \\ \varepsilon_j=\pm1, j\in J}} \sum_{\substack{\emptyset\subset J_0\subsetneq\cdots\subsetneq J_s=J \\ 0\leq s\leq r}} (-1)^s \prod_{0\leq s'\leq s} V_{\varepsilon(J_{s'}\setminus J_{s'-1}); J_{s'}^c} \cdot T_{q,x}^{J_0},$$

$$[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0,$$

  の同時固有函数: $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = c_{r,\lambda} P_\lambda(x)$.
- Askey-Wilson 多項式は q 超幾何 ${}_4\phi_3$ で明示できるが,
  Koornwinder 多項式の "良い" 明示式はまだ知られていない様子.

Koornwinder や van Dijen の仕事は,
Macdonald 多項式の理論の "BC 型" 類似を動機としている.

3.3. Macdonald 対称多項式 [1/2]

Macdonald 多項式の理論, GL 型. [Macdonald (1987 年頃); (1995), Chap. 6]

- $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \curvearrowleft S_n$: 番号置換, $\mathbb{C}[x]^{S_n}$: 対称多項式環.
- $\mathbb{C}[x]^{S_n} = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{C} m_\lambda^{\mathrm{GL}}(x)$, $m_\lambda^{\mathrm{GL}}(x) := \sum_{\mu \in S_n \lambda} x^\mu$.
- Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素: $q, t \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$,

$$D_x^{(r)} := \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{1 - t x_i / x_j}{1 - x_i / x_j} \prod_{i \in I} T_{q, x_i}.$$

- $[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0$ かつ $D_x^{(r)} \curvearrowright \mathbb{C}[x]^{S_n}$.
- 以下を満たす $\mathbb{C}[x]^{S_n}$ の基底 $\{P_\lambda(x; t|q) \mid \lambda \in P_+\}$ が一意存在:
  - 三角性: $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{C} m_\mu$
  - 同時固有函数: $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(q^\lambda t^\rho)$.

  $P_\lambda(x; t|q)$ を Macdonald 対称多項式と呼ぶ.
- もう一つの特徴づけ: 三角性と直交性 $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle \propto \delta_{\lambda,\mu}$.

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{|S_n|} \int_T \overline{f(x)} g(x) w^{\mathrm{GL}}(x) \frac{dx}{(2\pi\sqrt{-1})^n x}, \quad w^{\mathrm{GL}}(x) := \prod_{i \neq j} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty}{(t x_i / x_j; q)_\infty}.$$

3.3. Macdonald 対称多項式 [2/2]

- 小さい λ に対する $P_\lambda(x;t|q)$ の例: $m_\lambda := \sum_{\mu\in S_n\lambda} x^\mu$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$$P_{(1)}=m_{(1)},\quad P_{(2)}=m_{(2)}+\frac{(1+q)(1-t)}{1-qt}m_{(1,1)},\quad P_{(1,1)}=m_{(1,1)},$$
$$P_{(3)}=m_{(3)}+\frac{(1-q^3)(1-t)}{(1-q^2t)(1-q)}m_{(2,1)}+\frac{(1-q^3)(1-q^2)(1-t)^2}{(1-q^2t)(1-qt)(1-q)^2}m_{(1^3)},$$
$$P_{(2,1)}=m_{(2,1)}+\frac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{(1-qt^2)}m_{(1^3)},\quad P_{(1^3)}=m_{(1^3)}.$$

- パラメータ特殊化
  - $P_\lambda(x,t=q|q)=s_\lambda(x)$: Schur 多項式.
  - $\lim_{q\to 1}P_\lambda(x,t=q^\beta|q)=J_\lambda(x;\beta)$: Jack 多項式.
- $n=2$, $(x_1,x_2)=(x,x^{-1})$ とすると, 連続 q-Jacobi 多項式 $P_l^{(\alpha,\beta)}(x|q)$ の特殊化である連続 q 超球多項式/Rogers 多項式と本質的に一致:
$P_\lambda(x,x^{-1};t|q)=C_{\lambda_1-\lambda_2}(x;t|q)$,
$C_l(x;t|q)\propto P_l^{(\beta+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2})}(x|q)=x^l{}_2\phi_1(q^{-l},\cdots;q,q/(tx^2))$, $t=q^\beta$.

3.4. Macdonald-Cherednik 理論 [1/3]

[I.G. Macdonald (1987 頃), I. Cherednik (1992–95), 野海正俊 (1995), S. Sahi (1998), Macdonald (2003), J.V. Stokman (2000, 2011, 2014), ...]

Macdonald 対称多項式や Koornwinder 多項式はアフィン Hecke 環の表現を用いて統一的に扱える.

- 1987 年頃, Macdonald が Weyl 群対称性を持った多変数 q 直交多項式系を導入.
- 1990 年前後, 当時研究が進んでいた量子群の表現論において, Macdonald 多項式のパラメータ特殊化のうちの一部が行列要素で実現された (球函数の q 類似).
- しかし, 任意パラメータの場合を量子群で実現することができなかった.
  $\to$ Cherednik のアイデア: (qKZ 方程式と) アフィン Hecke 環を使う.
- 一方, 1992 年に Koornwinder が Askey-Wilson 多項式の多変数化を導入.
- 1995 年に野海が C 型アフィン Hecke 環の新しい表現 (基本表現) を導入し, Koornwinder 多項式がその基底であることを証明.
- 1998 年に Sahi が Macdonald (1972) の意味での非被約なアフィンルート系について Cherednik の議論を拡張.
- 2003 年の Macdonald の本で被約 (Cherednik) と非被約 (Sahi) を統合.
- 少し不備があって, Stokman が 2011 年に修正.

3.4. Macdonald-Cherednik 理論 [2/3]

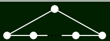
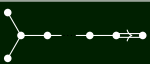
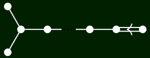
[I. Cherednik (1992–95), 野海正俊 (1995), S. Sahi (1998), I.G. Macdonald (2003), J.V. Stokman (2000, 2011, 2014), ...]

Macdonald-Cherednik 理論の概要: [Macdonald (2003), Stokman (2011)]

- ある条件を満たすアフィンルート系の組 (S, S') に適用可.
  - Macdonald (1972) の意味でのアフィンルート系. (次ページ参照)
- 組 (S, S') は 3 つのクラスに分かれる:
  (I) $(S, S') = (S(R), S(R^\vee))$, R: 既約有限ルート系.
  (II) $S = S' = S(R)^\vee$, R: 既約有限ルート系.
  (III) $S = S'$: 被約でないアフィンルート系, (X, Y) 型.
- Macdonald 対称多項式 (の A_n 型版) は (I) または (II) の $S = S' = S(\mathrm{A}_n)$ に対応.
- Koornwinder 多項式は (III) の $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型.

3.4. Macdonald-Cherednik 理論 [3/3]

既約アフィンルート系

被約, simply-laced		被約, non-simply-laced	
A_n		B_n	
D_n		$\mathrm{B}_n^\vee$	
E_6		C_n	
		$\mathrm{C}_n^\vee$	
		BC_n	
E_7		F_4	
		$\mathrm{F}_4^\vee$	
E_8		G_2	
		$\mathrm{G}_2^\vee$	

非被約

$(\mathrm{BC}_n, \mathrm{C}_n)$		$(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{BC}_n)$	
$(\mathrm{B}_n^\vee, \mathrm{B}_n)$		$(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$	

3.5. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィン Hecke 環と Askey-Wilson 多項式 [1/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィンルート系 S [Macdonald (2003), 6.4–6.6]

- $V = \mathbb{R}\epsilon$, $\langle \epsilon, \epsilon \rangle = 1$: 1 次元実 Euclid 空間,
  $F \coloneqq \{V \to \mathbb{R} \mid \text{affine-linear}\} \xleftarrow{\sim} V \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{D} V$, $\langle v, \cdot \rangle + r \leftarrow\!\shortmid v + r \mapsto v$
- $F \supset S \coloneqq \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \ni a_1 \coloneqq \epsilon, a_0 \coloneqq -\epsilon + \frac{1}{2}$.
  $S \supset \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は C_1 型アフィンルート系.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on F: $\langle a, b \rangle \coloneqq \langle Da, Db \rangle$ for $a, b \in F$.
  For $a \in S$, $a^\vee \coloneqq 2a / \langle a, a \rangle \in S$. $a_1^\vee = 2a_1$, $a_0^\vee = 2a_0$.
  $S \supset \{\pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathrm{C}_1^\vee$ 型アフィンルート系.
- For $a \in S$, $s_a \colon V \to V$, $x \mapsto x - a^\vee(x) \cdot Da$.
  $H_a \coloneqq a^{-1}(0) \subset V$ に関する鏡映.
  - $s_1 \coloneqq s_{a_1}$: $x \mapsto x - a_1^\vee(x) \cdot Da_1 = x - 2\langle \epsilon, x \rangle \cdot \epsilon = -x$.
    $H_1 \coloneqq H_{a_1} = a_1^{-1}(0) = \{0\}$ に関する鏡映.
  - $s_0 \coloneqq s_{a_0}$: $x \mapsto x - a_0^\vee(x) \cdot Da_0 = x - 2(\langle -\epsilon, x \rangle + \frac{1}{2}) \cdot (-\epsilon) = \epsilon - x$.
    $H_0 \coloneqq H_{a_0} = a_0^{-1}(0) = \{\frac{1}{2}\epsilon\}$ に関する鏡映.

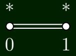
3.5. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィン Hecke 環と Askey-Wilson 多項式 [2/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィンルート系

$S = \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \subset F$,

$a_1 = \epsilon, a_1^\vee = 2a_1, a_0 = -\epsilon + \frac{1}{2}, a_0^\vee = 2a_0 \in S$,

$s_1 = s_{a_1}, s_0 = s_{a_0} \colon V \to V$, $s_1(x) = -x$, $s_0(x) = \epsilon - x$.



S の (拡大) アフィン Weyl 群 $\widetilde{W} = W_{\mathrm{ex}} = W_{\mathrm{af}}$:

- $\widetilde{W} := \langle s_a \, (a \in S) \rangle_{\mathsf{grp}} \subset \mathrm{Isometry}(V = \mathbb{R}\epsilon, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- $\widetilde{W} = \langle s_0, s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \cong \left\langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \right\rangle_{\mathsf{grp}}$.
- $\widetilde{W} = W \ltimes t(L')$, $W := \langle s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \cong \{\pm 1\} = W(\mathrm{C}_1)$,
  $t(L') := \{t(\lambda) \colon x \mapsto x + \lambda \mid \lambda \in L' = Q_{\mathrm{C}_1}^\vee = \mathbb{Z}\epsilon\}$.
  $\widetilde{W} = \langle s_1, t(\epsilon) \rangle_{\mathsf{grp}}$, $t(\epsilon) = s_0 s_1$. $\quad s_0 s_1(x) = s_0(-x) = \epsilon - (-x) = x + \epsilon$.

$\widetilde{W} \curvearrowright F$: $s_a(f) = f - \langle a^\vee, f \rangle a$. この作用は $S \subset F$ を保つ.

- $\widetilde{W}$ 軌道分解: $S = O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$,
  $O_1 = \pm\epsilon + \mathbb{Z}, \quad O_1^\vee = 2O_1, \quad O_0 = O_1 + \frac{1}{2}, \quad O_0^\vee = 2O_0 = O_1^\vee + 1$.
- $a_i \in O_i$, $a_i^\vee \in O_i^\vee$ $(i = 1, 0)$

3.5. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィン Hecke 環と Askey-Wilson 多項式 [3/4]

$S = \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \ni a_1 = \epsilon,\ a_1^\vee = 2a_1,\ a_0 = -\epsilon + \frac{1}{2},\ a_0^\vee = 2a_0.$
$\widetilde{W} = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \rangle_{\mathsf{grp}} = \langle s_1, t(\epsilon) \rangle_{\mathsf{grp}}, \quad t(\epsilon) = s_0 s_1.$
$\widetilde{W} \curvearrowright S = O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee, \quad a_i \in O_i,\ a_i^\vee \in O_i^\vee \quad (i = 1, 0).$

$\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee).$ 各 $\widetilde{W}$ 軌道に τ パラメータが対応: $\tau_i \leftrightarrow O_i,\ \tau_i^\vee \leftrightarrow O_i^\vee.$

アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$: $\mathbb{K}$ 代数, 群環 $\mathbb{K}\widetilde{W}$ の変形.

- 生成元: T_1, T_0. 群環の s_1, s_0 に対応.
- 関係式: $(T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1}) = 0\ (i = 0, 1)$. 群環の $s_i^2 = 1$ に対応.

<u>定理</u> [被約ルート系の場合は Bernstein (unpublished); Lusztig (1989)]
中心 $Z(H(\widetilde{W})) = \mathbb{K}[Y + Y^{-1}]$, $Y := T_0 T_1$: q-Dunkl 作用素.
Y は群環の $t(\epsilon) = s_0 s_1$ に対応.

3.5. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィン Hecke 環と Askey-Wilson 多項式 [4/4]

$\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$, $H(\widetilde{W}) = \langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1})\ (i = 0, 1) \rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}}$.

定理 [一般の n の $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型: 野海 (1995)] $L' = Q_{C_1}^\vee = \mathbb{Z}\epsilon$, $x = e^\epsilon$.
$H(\widetilde{W})$ の基本表現 $\rho_{q,\tau,\tau'} : H(\widetilde{W}) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}} A$, $A := \mathbb{K}L' = \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$,

$$T_i \longmapsto b_i(x_i) + c_i(x_i) s_i \quad (i = 1, 0),$$

$$x_1 := x,\ x_0 := q^{\frac{1}{2}} x^{-1}, \quad (s_1 f)(x) := f(x^{-1}),\ (s_0 f)(x) := f(q x^{-1}),$$

$$b_i(z) := \frac{1}{1 - z^2}\bigl((\tau_i - 1/\tau_i) + (\tau_i^\vee - 1/\tau_i^\vee) z\bigr),\ c_i(z) := \tau_i - b_i(z).$$

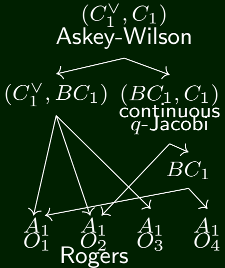
$W = \langle s_1 \rangle_{\mathrm{grp}} \curvearrowright A$, $s_1(x) = x^{-1}$; $A_0 := A^W = \mathbb{K}[x + x^{-1}]$.

定理 [一般の n の $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型: 野海 (1995)] $m_l = x^l + x^{-l}$.
A_0 の基底 $\{p_l \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ で $p_l = m_l +$ lower かつ $(Y + Y^{-1}) p_l = (\text{eigen}) p_l$ なるものが一意存在. 更に $p_l(x) = (l$ 次 Askey-Wilson 多項式$)$.
但し $(a, b, c, d) = (\tau_1 \tau_1^\vee, -\tau_1/\tau_1^\vee, q^{1/2} \tau_0 \tau_0^\vee, -q^{1/2} \tau_0/\tau_0^\vee)$.

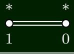
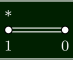
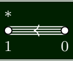
3.6. 補足・課題・文献 [1/4]

補足

- 部分ルート系を反映した特殊化図式 [山口航平-Y., 2022]
    - q-Askey スキームはアフィンルート系の話を反映していない...
    - $(C_1^\vee, C_1)$ アフィンルート系 S には自然な部分アフィンルート系があって, 右のようになる. (各矢印は行き先が出発の部分ルート系であることを意味する.)
    - これと合的な Askey-Wilson 多項式のパラメータの特殊化をまとめたのが次頁の表.



- 双スペクトル性 [van Meer-Stokman (2010), van Meer (2011), Stokman (2014)]
    - Macdonald-Koornwinder 多項式系 $\{p_\lambda(x) \mid \lambda \in P_+\}$ は 双スペクトル関数 $p(x;\xi)$ の特殊化: $p_\lambda(x) = p(x;\xi_\lambda)$.
    - $D_x^{(r)} p(x;\xi) = e_r(\xi) p(x;\xi)$, $D_\xi^{(r)} p(x;\xi) = e_r(x) p(x;\xi)$,
    - $p(x;\xi;q,t) = p(\xi;x;q,t^*)$.

型	Dynkin 図形	Weyl 群軌道	t パラメータ			
$(C_1^\vee, C_1)$ Askey-Wilson		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$	τ_1	$\tau_1^\vee$	τ_0	$\tau_0^\vee$
$(C_1^\vee, BC_1)$		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0$	t_s	$t_s t_l$	t_s	t_s/t_l
(BC_1, C_1) cont. q-Jacobi		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0^\vee$	t_l^2	$t_s t_l$	1	t_s/t_l
BC_1		$O_1 \sqcup O_0^\vee$	t_l^2	t_s	1	t_s
A_1 Rogers		O_1	1	t	1	t
		O_3	t	1	t	1
		O_2	1	t^2	1	1
		O_4	t^2	1	1	1

3.6. 補足・課題・文献 [3/4]

課題

- 明示式: 多項式本体 (タブロー型), Pieri/Littlewood-Richardson 係数, 再生核.
- 楕円差分類似: Macdonald 作用素は Ruijsenaars 楕円差分作用素の退化.
- 双スペクトル Macdonald-Koornwinder 函数の研究.
- $\imath$ 量子群や楕円量子群の表現との関係の研究. $\cdots$

参考文献

- R. Askey, J. Wilson, "Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials", Memoirs AMS, 1985, pp.55.
- I. Cherednik, "Double affine Hecke algebras", LMS Lect. Note Ser., 319, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- J. van Diejen, "Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials", Invent. Math., 126 (1996), no. 2, 319–339.
- I. G. Macdonald, "Orthogonal polynomials associated with root systems", preprint (1987); arXiv:math/0011046.
- I. G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials", 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.
- I. G. Macdonald, "Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials", Cambridge Tracts in Mathematics, 157, Cambridge Univ. Press, 2003.

3.6. 補足・課題・文献 [4/4]

参考文献

- M. van Meer, “Bispectral quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations for arbitrary root systems”, Sel. Math. New Ser., 17 (2011), 183–221.
- M. van Meer, J. V. Stokman, “Double Affine Hecke Algebras and Bispectral Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equations”, Int. Math. Res. Not., 6 (2010), 969–1040.
- 野海正俊, “Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環”, 数理解析研究所講究録, 919 (1995), 44–55.
- S. N. M. Ruijsenaars, “Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities”, Comm. Math. Phys., 110 (1987), 191–213.
- S. Sahi, “Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality”, Ann. Math., 150 (1999), 267–282.
- J. V. Stokman, “Macdonald-Koornwinder polynomials”, in “Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project”, vol. 2, Cambridge Univ. Press, 2020; arXiv:1111.6112.
- J. V. Stokman, “The c-function expansion of a basic hypergeometric function associated to root systems”, Ann. Math., 179 (2014), 253–299.
- K. Yamaguchi, S. Yanagida, “Specializing Koornwinder polynomials to Macdonald polynomials of type B, C, D and BC”, J. Algebraic Combin., 57 (2022), 171–226.

4. Askey-Wilson 代数

1. 超幾何直交多項式
2. q 超幾何直交多項式
3. Askey-Wilson 多項式
4. Askey-Wilson 代数
   4.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA
   4.2. Askey-Wilson 代数
   4.3. 補足・問い・文献
5. "Askey-Wilson 空間"？

4.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA [1/3]

- $\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_1', \tau_0, \tau_0')$,
  $H = H(\widetilde{W}) := \big\langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1})\ (i = 0, 1) \big\rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}}$.
  $Z(H) = \mathbb{K}[Y + Y^{-1}]$, $Y := T_0 T_1$: q-Dunkl 作用素.
  $\rho_{q,\tau,\tau'} \colon H \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $T_i \mapsto b_i(x_i)s_i + c_i(x_i)$: 基本表現.
- $H = \langle T_1, Y \rangle_{\text{alg}} \subset \operatorname{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $\mathbb{K}$ 加群として $H \cong \mathbb{K}[T_1] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$.
- 二重アフィン Hecke 環 $\mathbb{H}$ [被約: Cherednik (1990s), 非被約: Sahi (1998)]
  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\widetilde{W}) := \big\langle X^{\pm 1}, T_1, Y \big\rangle_{\text{alg}} \subset \operatorname{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$. $X := x \cdot -$ は掛算作用素.
  - $\mathbb{K}$ 加群として $\mathbb{H} \cong \mathbb{K}[X^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[T_1] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$.
  - Cherednik 対合 $\omega \colon \mathbb{H}(\widetilde{W}) \to \mathbb{H}(\widetilde{W})$: $\mathbb{K}$ 代数の反準同型, involutive,
    $\omega(X) = Y^{-1}$, $\omega(T_1) = T_1$, $\omega(Y) = X^{-1}$. Fourier 変換の q 差分類似.
  - $\mathbb{H}$ や ω を用いて Macdonald-Koornwinder 多項式に関するノルム予想, 定数項予想や双対性予想などが解決された.

4.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA [2/3]

- $\mathbb{K} := \mathbb{C}(\nu, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$, $\nu := q^{1/2}$,
  $H = \langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i)\ (i = 0, 1)\rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}} \overset{\rho_{q,\tau,\tau^\vee}}{\subset} \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$.
  $Y := T_0 T_1$, $\mathbb{H} = \left\langle X^{\pm 1}, T_1, Y \right\rangle_{\mathsf{alg}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$.
- $\mathbb{H}$ は (抽象) 環として次の表示を持つ [A. Oblomkov (2004)]:
  - 基礎環: $\mathbb{K}' := \mathbb{C}[\nu^{\pm 1}, \tau_1^{\pm 1}, \tau_0^{\pm 1}, (\tau_1^\vee)^{\pm 1}, (\tau_0^\vee)^{\pm 1}]$.
  - 生成元: $T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee$.
  - 関係式: $(T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i) = 0 \qquad (i = 1, 0)$,
    $(T_i^\vee - \tau_i^\vee)(T_i^\vee + 1/\tau_i^\vee) = 0 \quad (i = 1, 0)$, $T_1^\vee T_1 T_0 T_0^\vee = 1/\nu$.

  中心は自明: $Z(\mathbb{H}) = 0$.
- $X_1 := T_0^{-1}(T_1^\vee)^{-1} + T_1^\vee T_0$, $X_2 := T_1^\vee T_1 + \nu T_0 T_0^\vee$, $X_3 := \nu T_0^\vee T_1^\vee + q T_1 T_0$.
  で定まる $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{H}$ は以下を満たす [M. Mazzocco (2016)]:
  $[X_1, X_2]_q = \overline{q} X_3 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0}\,\overline{\tau_1} - \overline{\tau_0^\vee} M)$, $\quad [A, B]_q := \nu AB - \nu^{-1} BA$,
  $[X_2, X_3]_q = \overline{q} X_1 - \overline{\nu}(\overline{\tau_1}\overline{\tau_0^\vee} - \overline{\tau_0} M)$, $\quad M := (\nu\tau_1)^{-1} T_1 - \nu\tau_1 T_1^{-1}$,
  $[X_3, X_1]_q = \overline{q} X_2 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0^\vee}\overline{\tau_0} - \overline{\tau_1} M)$, $\quad \overline{\alpha} := \alpha - \alpha^{-1}$, $a_1, a_2, a_3, b, c \in \mathbb{K}'$,
  $\nu X_1 X_2 X_3 - q X_1^2 - X_2^2/q - q X_3^2 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b + cM = 0$.

4.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA [3/3]

- $\mathbb{H}$: 生成元 $T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee$, $\nu = q^{1/2}$, $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$,
  関係式 $(T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i) = (T_i^\vee - \tau_i^\vee)(T_i^\vee + 1/\tau_i^\vee) = 0$, $T_1^\vee T_1 T_0 T_0^\vee = 1/\nu$.
  $X_1 := T_0^{-1}(T_1^\vee)^{-1} + T_1^\vee T_0$, $X_2 := \ldots$, $X_3 := \ldots$.,
  $[X_1, X_2]_q = \overline{q} X_3 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0}\,\overline{\tau_1} - \overline{\tau_0^\vee} M)$, etc.,
  $\nu X_1 X_2 X_3 - q X_1^2 - X_2^2/q - q X_3^2 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b + cM = 0.$
- $q = 1$ で考える [Oblomkov (2004)]. $\mathbb{K}'' := \mathbb{C}[\tau_1^{\pm 1}, \tau_0^{\pm 1}, (\tau_1^\vee)^{\pm 1}, (\tau_0^\vee)^{\pm 1}]$.
  - $\mathbb{H}_{q=1}$ の中心 $Z_{q=1}$ はアフィン三次曲面 $\mathcal{C}(\underline{\tau})$ の座標環:
    $Z_{q=1} = \mathbb{K}''[X_1, X_2, X_3]/(R_{\underline{\tau}})$, $a_1', a_2', a_3', b' \in \mathbb{K}''$,
    $R_{\underline{\tau}} := X_1 X_2 X_3 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + a_1' X_1 + a_2' X_2 + a_3' X_3 + b'$.
    Fricke-Klein の 4 次元族と一致.
  - $Z_{q=1}$ は Poisson 構造を持つ. $C_{\underline{\tau}}$ の smooth point でシンプレクティック.
    $\{X_2, X_1\} = X_2 X_1 - 2X_3 + a_3'$,
    $\{X_1, X_3\} = X_1 X_3 - 2X_2 + a_2'$,
    $\{X_3, X_2\} = X_3 X_2 - 2X_1 + a_1'$.
  - $\mathcal{C}(\underline{\tau})$ の特異点には ADE 特異点のみ現れうる: $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{D}_4$ 型.

4.2. Askey-Wilson 代数 [1/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 spherical DAHA $\mathbb{SH}$ [Oblomkov, 2004].

- $e := \frac{1+\tau_1 T_1}{1+\tau_1} \in H \subset \mathbb{H}$: 冪等元, $e^2 = 1$.
  - $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\nu = q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$ 上.
    $\mathbb{H} = \langle T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee \mid (T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i) = 0, \ldots \rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}}$.
  - 群環 $\mathbb{C}W = \mathbb{C}\langle s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \subset \mathbb{C}\widetilde{W} = \mathbb{C}\langle s_1, s_0 \rangle_{\mathsf{grp}}$ の対称化作用素 $\frac{1}{2}(1+s_1)$ に対応.
- $\mathbb{SH} := e\mathbb{H}e \subset \mathbb{H}$: 部分環, e を単位元とする.
  - 群環や Hecke 環の spherical subalgebra の類似.
- $\mathbb{H}$ や $\mathbb{SH}$ の普遍性: $q_0 \in \mathbb{C}$ が 1 の冪根でなければ,
  族 $\{\mathbb{H}(q, \underline{\tau})\}_{q \in \mathbb{C}, \underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ は環 $D_{q_0} := \mathbb{C}_{q_0}[X^{\pm 1}, P^{\pm 1}] \rtimes \mathbb{C}W$ の普遍変形を,
  族 $\{\mathbb{SH}(q, \underline{\tau})\}_{q \in \mathbb{C}, \underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ は $D_{q_0}^W = \mathbb{C}_{q_0}[X^{\pm 1}, P^{\pm 1}]^W$ の普遍変形を与える.
  特に変形空間は 5 次元 (=Askey-Wilson 多項式のパラメータの数).
  - Hochschild コホモロジー $\mathrm{HH}^*(D_{q_0=1})$ が $\mathrm{HH}^1 = \mathrm{HH}^{>2} = 0$, $\mathrm{HH}^2 = \mathbb{C}^5$.
  - $q_0 = 1$ の時は, $\{(C_{\underline{\tau}}, \{\cdot, \cdot\})\}_{\underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ が Poisson 代数 $(D_{q_0=1}^W, \{X, P\} = XP)$ の普遍 Poisson 変形を与える.

4.2. Askey-Wilson 代数 [2/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 spherical DAHA $\mathbb{SH}$ と同型な環が色々な文脈で知られている:

- Zhedanov の Askey-Wilson 代数 [Zhedanov (1991)]
  - “量子群” の行列要素として Askey-Wilson 多項式を実現する.
  - FRST 構成 (R 行列から量子群を構成, A 型) の BC 型版 (R 行列と K 行列から). R 行列に q が, K 行列に 4 パラメータがある.
  - Terwilliger の表示 (2013) により $\mathbb{SH}$ と同型なことが分かる.
- Kauffman スケイン代数 [Przytycki (1991), Turaev (1988)] の一種.
  - $\Sigma_{0,n}$: n-punctured sphere, $I := [0,1]$, $\mathcal{M} := \sigma_{0,n} \times I$.
  - $\mathrm{Sk}_A(\mathcal{M})$: $\mathcal{M}$ 内の framed かつ unoriented な絡み目が生成する $\mathbb{C}[A^{\pm 1}]$ 加群を以下の関係式で割った $\mathbb{C}[A^{\pm 1}]$ 加群:

     $= -(A^2 + A^{-2})$,  $= A$  $+ A^{-1}$ .
  - 環構造: I 方向に絡み目を積む.
  - $\mathrm{Sk}_{\sqrt{-1}q^{1/2}}(\Sigma_{0,4})$ を以下で割ったものが $\mathbb{SH}$ と同型. [c.f. 樋上和弘 (2019)]

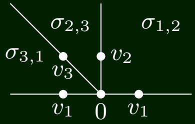
    $$\times z_i = \sqrt{-1}(\tau_i - 1/\tau_i), \quad \times z_i^\vee = \sqrt{-1}(\tau_i^\vee - 1/\tau_i^\vee) \quad (i = 0, 1).$$

    $$\{4\ 点\} = \{z_1, z_0, z_1^\vee, z_0^\vee\}.$$

4.2. Askey-Wilson 代数 [3/4]

- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$ [Bousseau (2023)]
  - ミラー対称性における散乱図 (scattering diagram) [Gross-Siebert,...]:
    B: 特異点つき整アフィン多様体 (integral linear manifold w. singularities)
    散乱図 $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}$: B の壁 (余次元 1 の整アフィン部分空間+冪級数) の集合.
    $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}$ が整合的 $\rightsquigarrow$ 可換代数 $A_{\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}}$, テータ函数基底 $\{\vartheta_p^{\mathrm{cl}}\}_{p \in B(\mathbb{Z})}$,
    構造定数は $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}$ の "破線" (broken lines) から決まる.
  - 散乱図 $\rightsquigarrow$ 団代数の標準基底 [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich, 2018].
  - q 変形版: 量子散乱図 $\mathfrak{D}$ [Kontsevich-Soibelman, Filippini-Stoppa, ...]:
    $\mathfrak{D}$ が整合的 $\rightsquigarrow$ 非可換代数 $A_{\mathfrak{D}}$, 量子テータ函数基底 $\{\vartheta_p\}_{p \in B(\mathbb{Z})}$,
    構造定数は $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}$ の量子破線から決まり, q を含む.
  - 量子散乱図 $\rightsquigarrow$ 量子団代数の標準基底 [Davison-Mandel, 2021, ...]
  - $\mathfrak{D}_{0,4}^{\mathrm{cl}}$: [Gross-Hacking-Keel-Siebert (2019), "The mirror of the cubic surface"].

- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$ [Bousseau (2023)]
  - $B := \mathbb{R}^2 / \langle -\mathrm{id} \rangle \supset B_0 := B \setminus \{0\}$.
    $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} / \sim,\ (x, 0) \sim (-x, 0)$.
    $B(\mathbb{Z}) := B_0(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.



  - 係数環 $R = \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}, R_{1,0}, R_{0,1}, R_{1,1}, y]$.
  - 量子射線 (quantum ray) (p_ρ, f_ρ):
    $p_\rho \in B_0(\mathbb{Z})$, primitive; $f_\rho \in R[\![z^{-p_\rho}]\!]$, $f = 1 \bmod z^{-p_\rho}$.
  - 量子散乱図: $\mathfrak{D} = \{\rho = (p_\rho, f_\rho) \mid \rho_1 = \rho_2$ if $\mathbb{R}_{\geq 0} p_{\rho_1} = \mathbb{R}_{\geq 0} p_{\rho_2}\}$.
  - $(m, n) \in B_0(\mathbb{Z})$ に対して $\rho_{m,n} = (p_{m,n}, f_{m,n})$ を, $p_{m,n} := (m, n)$ 及び

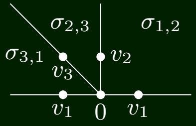
$$(m,n) = (1,0) \bmod 2 \text{ なら } f_{m,n} := F(R_{1,0}, R_{0,1}R_{1,1}, y, z^{-(m,n)}),$$
$$(m,n) = (0,1) \bmod 2 \text{ なら } f_{m,n} := F(R_{0,1}, R_{1,0}R_{1,1}, y, z^{-(m,n)}),$$
$$(m,n) = (1,1) \bmod 2 \text{ なら } f_{m,n} := F(R_{1,1}, R_{1,0}R_{0,1}, y, z^{-(m,n)}).$$

$$\begin{aligned} F^0(r, s, y, x) :=& 1 + \frac{rx(1+x^2)}{(1-q^2x^2)(1-q^{-2}x^2)} + \frac{yx^2}{(1-q^2x^2)(1-q^{-2}x^2)} \\ &+ \frac{sx^3(1+sx+x^2)}{(1-q^2x^2)(1-x^2)^2(1-q^{-2}x^2)} \in \mathbb{Z}[r,s,y][\![x]\!] \end{aligned}$$

  - $\mathfrak{D}_{0,4} := \{\rho_{m,n} \mid (m,n) \in B_0(\mathbb{Z}), \gcd(m,n) = 1\}$.

4.2. Askey-Wilson 代数 [4/4]

- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$ [Bousseau (2023)]
  - $R = \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}, R_{1,0}, R_{0,1}, R_{1,1}, y]$.
  - $\mathfrak{D}_{0,4}$ は整合的 $\rightsquigarrow$ R 代数 $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$, 量子テータ函数基底 $\{\vartheta_p\}_{p \in B(\mathbb{Z})}$.
  - $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$ は $\vartheta_{v_1}, \vartheta_{v_2}, \vartheta_{v_3}$ で生成され, q 交換子関係式及び q 三次関係式を満たす (非可換三次曲面). 特に $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$ は $\mathbb{SH}$ と同型.
  - Bousseau は更に $A_{\mathfrak{D}_{0,4}} \cong \mathrm{Sk}(\Sigma_{0,4}) \approx \mathcal{X}^q_{\mathrm{PGL}_2,\Sigma_{0,4}}$ (量子団代数) を用いて, 量子双対写像 $\widehat{\mathbb{I}}\colon \mathcal{A}_{\mathrm{SL}_2,\Sigma_{0,4}} \to \mathcal{X}^q_{\mathrm{PGL}_2,\Sigma_{0,4}}$ に関する strong positivity conjecture を肯定的に解決した.

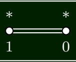


- 同様の話が $\Sigma_{1,1}$ (1 穴付きトーラス) の場合にも成立.
  - $A_{\mathfrak{D}_{1,1}}$ は A_1 型 spherical DAHA $\mathbb{SH}^{\mathrm{A}_1}$ と同型.
  - 後者に対応する q 直交多項式は Rogers 多項式.

4.3. 補足・文献 [1/2]

補足

- DAHA $\mathbb{H}$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が作用.
  - S 変換が Cherednik 対合 ω (にもう一つ反同型を合成したもの).
  - $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型だけでなく, 任意の型でも成立 [Cherednik].
- A_1 型 DAHA $\mathbb{H}^{\mathrm{A}_1}$ は $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA $\mathbb{H}$ の部分環.
  この埋め込みに対応するのは, [山口-Y.] の 4 つの特殊化の内の O_2 の場合.
  - 他の特殊化はアフィン Hecke 環の埋め込みに対応するが,
    DAHA の埋め込みにはならない.
  - spherical subalgebra $\mathbb{SH}^{\mathrm{A}_n}$ の $n \to \infty$ 極限が量子トロイダル代数 $\mathfrak{gl}_1$.

型	Dynkin 図形	Weyl 群軌道	t パラメータ			
$(C_1^\vee, C_1)$ Askey-Wilson		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$	τ_1	$\tau_1^\vee$	τ_0	$\tau_0^\vee$
A_1 Rogers		O_1	1	t	1	t
		O_3	t	1	t	1
		O_2	1	t^2	1	1
		O_4	t^2	1	1	1

4.3. 補足・文献 [2/2]

参考文献

- P. Bousseau, “Strong Positivity for the Skein Algebras of the 4-Punctured Sphere and of the 1-punctured Torus”, Comm. Math. Phys., 398 (2023), 1–58.
- N. Crampé, L. Frappat, J. Gaboriaud, L. P. d’Andecy, E. Ragoucy, L. Vinet, “The Askey-Wilson algebra and its avatars,” J. Phys. A., 54 (2021) 063001, 32pp.
- B. Davison, T. Mandel, “Strong positivity for quantum theta bases of quantum cluster algebras”. Invent. Math., 226 (3) (2021), 725–843.
- M. Gross, P. Hacking, S. Keel, M. Kontsevich, “Canonical bases for cluster algebras”, J. AMS., 31 (2) (2018), 497–608.
- M. Gross, P. Hacking, S. Keel, B. Siebert, “The mirror of the cubic surface”, preprint (2019); arXiv:1910.08427.
- K. Hikami, “DAHA and skein algebra of surfaces: double-torus knots,” Lett. Math. Phys., 109 (2019), 2305–58.
- A. Oblomkov, “Double affine Hecke algebras of rank one and affine cubic surfaces”, Int. Math. Res. Not., 2004 (2004) no. 18, 877–912.
- P. Terwilliger, “The universal Askey-Wilson algebra and DAHA of type $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$”, SIGMA, 9, Paper 047, (2013), 40pp.
- A. S. Zhedanov. “Hidden symmetry of Askey-Wilson polynomials”, Theor. Math. Phys., 89 (1991), 1146–57.

5.1 Askey-Wilson 空間? [1/2]

Painlevé 方程式 P_{VI} の Riemann-Hilbert 対応 [稲葉-岩崎-齋藤, 2004-06]

- $\kappa \in \mathcal{K}$: 局所指数.
  $t = (t_1, \dots, t_4) \in T = \mathrm{Conf}^4(\mathbb{P}^1)$: 確定特異点の位置 ($\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}(\kappa)$ の時間変数).
  $\mathcal{M}_t(\kappa)$: $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2, 確定特異点 4 つ $t \in T$, 局所指数 $\kappa \in \mathcal{K}$ の安定放物接続のモジュライ空間 ($\mathrm{P}_{\mathrm{VI}}(\kappa)$ の "相空間").
- $a \in A$: 局所モノドロミー.
  $\mathcal{R}_t(a)$: モノドロミー表現 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のモジュライ空間.
  $\mathcal{R}_t(a) \cong \mathcal{C}(\underline{\tau})$: Fricke-Klein の三次曲面 $=$ AW 代数の古典極限 $\mathbb{SH}_{q=1}$.
- $\mathrm{RH}_{t,\kappa} : \mathcal{M}_t(\kappa) \to \mathcal{R}_t(a) \cong \mathcal{C}(\underline{\tau})$, $\nabla \mapsto \rho$, $a = \mathrm{rh}(\kappa)$: Riemann-Hilbert 対応.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_t \arrow[r, "\mathrm{RH}"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{K} \arrow[r, "\mathrm{rh}"'] & \Theta \end{tikzcd}$$

- <u>定理</u> [稲葉-岩崎-齋藤]
  κ が "壁" 上になければ $\mathrm{RH}_{t,\kappa}$ は双正則 (biholomorphic).
  κ が "壁" 上にあるなら $\mathrm{RH}_{t,\kappa}$ は (解析的) 極小特異点解消.

Askey-Wilson 代数の諸研究は RH 対応の “量子化” の存在を示唆している:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{AW 空間?} \arrow[rr, dotted, "\mathrm{QRH?}"] \arrow[dl, dotted] \arrow[dd, dotted] & & \mathbb{SH} \arrow[dl, "q\to1"'] \arrow[dd] \\
\mathcal{M}_t \arrow[rr, "\mathrm{RH}"] \arrow[dd] & & \mathcal{C} \arrow[dd] & \\
 & ? \arrow[rr, dotted, "\mathrm{qrh?}"] \arrow[dl, dotted] & & \Theta \times \mathbb{C}_q \arrow[dl, "q\to1"] \\
\mathcal{K} \arrow[rr, "\mathrm{rh}"'] & & \Theta &
\end{tikzcd}$$

関連しそうなこと: クラス S 理論の非可換 line operator 代数:

- クラス S 理論 [Gaiotto (2009–)]. Σ: 穴あき Riemann 面.
  6 次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ SCFT $\xrightarrow{\Sigma\text{でコンパクト化}}$ 4 次元 $\mathcal{N}=2$ SQFT $\mathcal{T}_\Sigma$.
- 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}$ $\rightsquigarrow$ line operator 代数 $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ (可換環).
  $\rightsquigarrow$ 非可換変形 $\mathcal{A}^q_\mathcal{T}$ [Gaiotto-Moore-Neitzke (2010)]
- $\mathcal{A}^q_{\mathcal{T}_\Sigma}$ “ $\cong$ ” $\mathrm{Sk}_{\sqrt{-1}q^{1/2}}(\Sigma)$. これを $\Sigma=\Sigma_{0,4}$, $\Sigma_{1,1}$ で示したのが [Bousseau].

5.2. 文献

参考文献

- D. Gaiotto, “$N = 2$ dualities”, J. High Energy Phys., (8):034 (2012), 57pp; arXiv:0904.2715.
- D. Gaiotto, G. W. Moore,A. Neitzke, “Framed BPS states”, Adv. Theor. Math. Phys. 17 (2) (2013), 241–397; arXiv:1006.0146.
- M. Inaba, K. Iwasaki, M. Saito, “Dynamics of the Sixth Painlevé Equation”, Séminaires and Cnngrés, 14 (2006), 103–167.

全般の参考文献:

- 青本和彦「直交多項式入門」数学書房, 2013.
- I. G. Macdonald, “Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials”, Cambridge Tracts in Mathematics, 157, Cambridge Univ. Press, 2003.
- 柳田伸太郎, 書評: Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, 数学, 74 号 1 巻, 2022, 105–111. (上の本の書評)

ご清聴ありがとうございました.