2020年度数理科学展望I　講義ノート

担当:　柳田 伸太郎

ver. 2020.12.21

目次

0　講義の概要

この講義の目標

この講義では, 量子力学の話題を動機とした**Lie 群と Lie 環の表現論の入門的説明**を行います. 具体的には以下の内容を扱う予定です.

- 量子力学の初歩: Schrödinger 方程式, 水素原子型 Schrödinger 方程式, 元素の周期表
- 回転群 SO(n), 特に三次回転群 SO(3) と二次特殊ユニタリ群 SU(2)
- 線形 Lie 群とその Lie 環, 群の表現, 線形 Lie 群の表現と Lie 環の表現
- SU(2) と SO(3) の有限次元既約表現の分類
- 球関数としての球面調和関数

前提知識は, 学部二年生までに習う全ての数学 (特に微積分, 線形代数, 位相空間論) と以下の二項目です.

- 群論の初歩.
- 測度論および Lebesgue 積分論の初歩 (4 日目の後半と 5 日目の前半で少し出てくるだけ).

講義の進め方

Zoom で講義します. 一回あたり約 60 分 $\times$ 2 コマの予定です. **予め講義ノートを読み, 演習問題も解いておいて下さい**.

この講義は二コマ続きの設定で, 本来は演習の時間もとることになっていますが, このオンライン講義では演習時間は設けません. 講義ノートには演習問題の解答も載せていますので, 各自で演習を進めて下さい.

予定

講義日程と各講義の内容を以下のように予定しています. 全部で 5 回です.

11/09	水素原子型 Schrödinger 方程式
11/16	SO(3) と SU(2)
11/30	Lie 群と Lie 環の表現
12/07	SU(2) と SO(3) の表現
12/14	球面調和関数

教科書・参考書

教科書は指定しません. 主な参考書として次の 2 つを挙げます.

(1) 山内恭彦, 杉浦光夫, **連続群論入門**, 新数学シリーズ 18, 培風館 (1960).

(2) 猪木慶治, 川合光, **量子力学 1,2**, KS 物理専門書, 講談社 (1994).

二日目以降は (1) に基づいて講義します. (2) は物理学科向けの量子力学の教科書です. 初日で量子力学のさわりを説明しますが, (2) に詳しいことは全て書いてあります.

成績

レポートで成績を決めます. 毎回レポート問題を課します. 締切は**次週の月曜日の 13 時**とします.

オフィスアワー・連絡先

オフィスアワーは Zoom 講義の直後とします．オフィスアワー以外の時間でも，メール (yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp) にて随時質問や相談に応じられますのでご連絡ください．

ウェブページ

このクラス用のウェブページを以下のアドレスに作りました．予定や講義ノートの最新版を載せます．
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2020MP1.html

0.1　全般的な記号

この講義ノートの全編で用いる記号を説明する．

(1) $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数全体の集合を表す．

(2) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．また $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数のなす集合を，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数のなす集合を表す．同様に $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ 等の記号も用いる．

(3) 複素数について，虚数単位は i で，実部は Re で，虚部は Im で表す．また $c \in \mathbb{C}$ の共役を $\overline{c}$ で表す．

(4) 集合 S に対し $T \subset S$ と書いたら，T は S の部分集合であることを意味する．また集合 S の恒等写像を id_S で，混乱が無ければ添字を省略して id で表す．

(5) $\delta_{m,n}$ で Kronecker のデルタを表す．つまり $m = n$ なら $\delta_{m,n} = 1$, $m \neq n$ なら $\delta_{m,n} = 0$.

(6) 単位行列を I で，零行列を O で表す．単位行列のサイズ n を明記したいときは I_n と書く．また行列 M に対し ${}^{T}M$ で転置行列を表す．

(7) 行列の成分表示は $M = [m_{jk}]$ のように表す．また対角行列を $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ で表す．そしてベクトルといったら縦ベクトルを考えるものとする．

(8) 線形空間の基底といったら元の順序も指定するものとし，$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ のように順列で表す．

(9) 群 G の単位元を e_G で，混乱が無ければ添字を略して e で表す．

1　水素原子型 Schrödinger 方程式 (11/09)

この節に限り, ベクトルを太文字で $\boldsymbol{x} = {}^T(x_1, \ldots, x_n)$ のように表す．同じ次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して, それらの内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 \cdots + x_n y_n$ と表す.

1.1　古典力学と量子力学

1.1.1　古典力学

古典力学とは, 物体の運動が Newton の運動方程式で記述できるというものであった．運動方程式は, 質量 m の質点が存在する位置 $\boldsymbol{x}$ を時刻 t の関数 $\boldsymbol{x}(t)$ とみなしたとき, 質点が受ける力が $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ であれば

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} \;=\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$$

となる, というものであった．ここで太文字 $\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{F}$ は考えている空間の次元分の実ベクトルであり, 素朴には三次元の実ベクトルである.

以下では力 $\boldsymbol{F}$ が時刻 t に依存せず, 更に

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) \;=\; F(\boldsymbol{x})$$

となる関数 $V(\boldsymbol{x})$ が存在すると仮定しよう．但し $\nabla = \nabla_{\boldsymbol{x}}$ はナブラ演算子で, 考えている空間が n 次元なら, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ として

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} V \;:=\; {}^T\Big(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\Big)$$

である．条件 $\nabla V(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ を満たす V を (考えている力学系の) ポテンシャルと呼ぶ．ポテンシャルが存在する場合, 運動方程式は Hamilton 系で書き直すことができる．運動量 $\boldsymbol{p} := m\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ と位置 $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{x}(t)$ の関数

$$H_{\mathrm{cl}} \;:=\; \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{q}) \tag{1.1.1}$$

を考えると, 運動方程式 $m\dfrac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ は連立方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \;=\; -\frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \;=\; \frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{p}}$$

と同値である．但し $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} := \nabla_{\boldsymbol{q}}$. この連立方程式が Hamilton 系であった．関数 $H_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を (考えている古典力学系の) ハミルトニアンと呼ぶ．$\boldsymbol{p}(t)$ と $\boldsymbol{q}(t)$ が Hamilton 系を満たす場合, ハミルトニアンの時間微分は

$$\frac{dH_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))}{dt} \;=\; \frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \;=\; \frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{p}}\Big(-\frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{q}}\Big) + \frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial H_{\mathrm{cl}}}{\partial \boldsymbol{p}} \;=\; 0$$

となる．つまりハミルトニアンの値 $H_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))$ は t に依存しない．この値 E をエネルギーと呼ぶのであった.

さて, 古典力学は人間が肉眼で観測できる物理的現象だけでなく, 天体の運動といったマクロの物理までをも記述する理論ではあるが, 原子サイズ以下のミクロの領域では破綻する．量子力学はそのようなミクロの世界の力学である.

1.1.2　量子力学

量子力学は, 考えているミクロの世界の粒子 (量子) が位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t の複素数値関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ であって

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \;=\; H\psi(\boldsymbol{x},t)$$

を満たすもので記述できる, というものである．ここで $\hbar$ は実数定数 (Planck 定数) であり, H は線形作用素, つまり関数 ψ を関数 $H\psi$ に移す写像であって, 線形性 $H(c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1H\psi_1+c_2H\psi_2$ $(c_1,c_2\in\mathbb{C})$ をみたすものである．この形の方程式を Schrödinger (シュレディンガー) 方程式と総称する．また Schrödinger 方程式の解 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ を波動関数と呼ぶ.

Schrödinger が元来考えたのは, H として

$$H \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.2}$$

という形のものである．ここで m は実数定数 (考えている粒子の質量) であり,

$$\Delta \;=\; \Delta_{\boldsymbol{x}} \;:=\; \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1.1.3}$$

は Laplace 作用素である．また V は位置 $\boldsymbol{x}$ のみに依存する関数で, 古典力学のポテンシャルに対応するものである．この場合の Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \;=\; \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\boldsymbol{x})\Big)\psi(\boldsymbol{x},t)$$

は, ポテンシャル V の中におかれた古典力学系のハミルトニアン H_{cl} (1.1.1) が一定の値 E を取るという方程式 (エネルギー保存則) $E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\boldsymbol{x})$ において, 置き換え $E\mapsto -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\boldsymbol{p}\mapsto -i\hbar\nabla$ を行って Schrödinger が導入した．古典力学の場合にならって, H を (考えている量子力学系の) ハミルトニアンと呼ぶ.

波動関数の物理的な意味を与えるのが Born の確率解釈である: 波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ で記述される粒子について時刻 t で位置の測定を行うと, 領域 D にその粒子が見いだされる確率は次の積分に比例する:

$$\int_D |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2\,d\boldsymbol{x}.$$

特に波動関数を定数倍して定義域全体上の積分が $\int|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2\,d\boldsymbol{x}=1$ となるようにできれば, 上の積分 $\int_D$ は粒子が領域 D に位置する確率そのものを与える．次の関数 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ を波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ の確率密度関数と呼ぶ.

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \;:=\; |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2\,. \tag{1.1.4}$$

確率密度関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ については, 流体力学における流体の保存則の類似 (連続方程式) が成立する．流束 (flux) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \;:=\; \frac{\hbar}{2mi}\big(\overline{\psi}(\boldsymbol{x},t)\nabla\psi(\boldsymbol{x},t)-(\nabla\overline{\psi}(\boldsymbol{x},t))\psi(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.1.5}$$

命題 1.1.1 (連続の方程式)**.** ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ が実数値の場合, 次の等式が成立する.

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0.$$

但し $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)={}^T(j_1,\dots,j_n)$ として $\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t):=\frac{\partial j_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial j_n}{\partial x_n}$.

1.2　Schrödinger 方程式の基本

1.2.1　定常状態

ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ が時間に依存しない場合の Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\Big)\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.2.1}$$

は時間微分と空間微分が左辺と両辺に分かれている微分方程式なので, その解 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \;=\; f(t)\varphi(\boldsymbol{x})$$

と変数分離できる．方程式 (1.2.1) に代入して辺々 $\varphi(\boldsymbol{x})$ で割れば

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} \;=\; \frac{1}{\varphi(\boldsymbol{x})}\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\Big).$$

左辺は t のみに, 右辺は $\boldsymbol{x}$ のみに依存しているので, 両辺は定数である．それを E とおこう．すると左辺から $f(t)$ に関する方程式 $\frac{df(t)}{dt} = i\hbar E f(t)$ が得られて, 積分定数 $C \in \mathbb{C}$ と指数関数を用いて

$$f(t) \;=\; C\exp\Big(-\frac{iEt}{\hbar}\Big)$$

と解ける．右辺からは $\varphi(\boldsymbol{x})$ に関する方程式

$$H\varphi(\boldsymbol{x}) \;=\; E\varphi(\boldsymbol{x}), \quad H \;:=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.2}$$

が得られるが, これを**時間を含まない Schrödinger 方程式**と呼ぶ.

時間を含まない Schrödinger 方程式の解 $\varphi(\boldsymbol{x})$ と $f(t)$ の指数関数解から, 元の Schrödinger 方程式 (1.2.1) の解

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \;=\; C\exp\Big(-\frac{iEt}{\hbar}\Big)\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.3}$$

が得られる．これを (1.2.1) の**定常解**と呼ぶ．また E を波動関数 ψ の**エネルギー**と呼ぶ．エネルギーという名前は, (1.2.2) より E がハミルトニアン H (1.1.2) の固有値であることに由来する．エネルギー E が実数であれば, 定常解の確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ (1.1.4) は

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \;=\; |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2 \;=\; |C|^2\,|\varphi(\boldsymbol{x})|^2$$

となって t に依存しない．これが「定常」という名前の由来である.

波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が $\boldsymbol{x}$ に関して二乗可積分である場合, つまり $\boldsymbol{x}$ についての定義域全体の上での積分に関して

$$\int |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2\,d\boldsymbol{x} \;<\; \infty$$

の場合, その粒子は**束縛状態** (bounded state) にあるという.

1.2.2　二体問題

今までは一つの粒子のみを考えてきたが, 次に二つの粒子が相互作用を持つ場合の量子力学系を考えよう. 質量 m_1 と m_2 の二つの粒子が, 位置 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ にある時にポテンシャル $V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ で表される相互作用を持つとする. この場合の波動関数は $\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t)$ という三変数関数で, また Schrödinger 方程式は次で与えられる.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad H := -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_{\boldsymbol{x}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_{\boldsymbol{x}_2} + V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2). \tag{1.2.4}$$

ポテンシャル V が $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ にのみ依存していることに注意して, 古典力学の場合と同様, 重心座標と相対座標

$$\boldsymbol{X} := \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$$

を用意する. これを用いると (1.2.4) のハミルトニアン H は次のように変数分離できる.

$$\begin{gathered} H = H_{\boldsymbol{X}} + H_{\boldsymbol{x}}, \quad H_{\boldsymbol{X}} := -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\boldsymbol{X}}, \quad H_{\boldsymbol{x}} := -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\boldsymbol{x}} + V(\boldsymbol{x}), \\ M := m_1 + m_2, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \end{gathered} \tag{1.2.5}$$

これから二体問題の場合の時間を含まない Schrödinger 方程式 $H\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = E\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) &= \Phi(\boldsymbol{X})\varphi(\boldsymbol{x}), \quad E = E_1 + E_2, \\ H_{\boldsymbol{X}}\Phi(\boldsymbol{X}) &= E_1\Phi(\boldsymbol{X}), \quad H_{\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x}) = E_2\varphi(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と変数分離される. $\boldsymbol{X}$ に関しては $\Phi(\boldsymbol{X}) = C\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}/\hbar)$, $\boldsymbol{k}^2 = 2ME_1$ と解ける.

以上より, (1.2.4) の形の二体問題の定常解を求めることは, 相対座標に関する時間を含まない Schrödinger 方程式

$$H_{\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x}) = E_2\varphi(\boldsymbol{x}) \quad H_{\boldsymbol{x}} := -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\boldsymbol{x}} + V(\boldsymbol{x}), \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{1.2.6}$$

を解くことに帰着される.

演習問題 (解答: 65 ページ)

問題 1.2.1. 命題 1.1.1 を証明せよ.

問題 1.2.2. (1.2.5) を導け.

1.3　水素原子型 Schrödinger 方程式

前副節で扱った形の二体問題のうち, 特にポテンシャル $V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ が相対距離 $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ にのみ依存する場合, つまり

$$V(\boldsymbol{x}) \;=\; V(|\boldsymbol{x}|)$$

となっている場合を考えよう. 言い換えると, 考えているポテンシャルが球対称性を持つ場合である.

相対座標に関する時間を含まない Schrödinger 方程式 (1.2.6) を思い出すと

$$H\varphi(\boldsymbol{x}) \;=\; E_2\varphi(\boldsymbol{x}), \quad H \;:=\; -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(|\boldsymbol{x}|), \quad \mu \;:=\; \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

ポテンシャルは球対称であるから, 直交座標から極座標

$$\boldsymbol{x} \;=\; (x, y, z) \;=\; (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

に移ることにしよう. 三次元の Laplace 作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を極座標で書き直すと次のようになる.

$$\Delta \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{\Lambda}{r^2}, \quad \Lambda \;:=\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{1.3.1}$$

ここで球面調和関数を導入しよう. 次の定理は §5 で証明する.

定理 1.3.1. $l \in \mathbb{N}$ と $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \le l$ に対して **Legendre (ルジャンドル) 陪関数** (associated Legendre function) $P_l^m(x)$ を

$$P_l^m(x) \;:=\; \frac{(-1)^m}{2^l l!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \quad (|x| < 1)$$

で定める. そして**球面調和関数** (spherical harmonics) $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ を次で定める.

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) \;:=\; e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta).$$

すると球面調和関数は微分作用素 Λ の固有関数である:

$$\Lambda Y_{l,m}(\theta, \phi) \;=\; l(l+1)Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

そこで定常状態の波動関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ を $\varphi(\boldsymbol{x}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$ と変数分離すると, $H\varphi = E\varphi$ から $R(r)$ の方程式

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\Big) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{\mu}\frac{R(r)}{r^2} + V(r)R(r) \;=\; ER(r)$$

が得られる. 更に $f(r) := rR(r)$ とすると

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu}\frac{f(r)}{r^2} + V(r)f(r) \;=\; Ef(r). \tag{1.3.2}$$

この $f(r)$ に関する方程式を**動径方向の Schrödinger 方程式**という. その解を用いて, 定常状態の波動関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ は次のように与えられる.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{r}f(r)Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

球対称ポテンシャル $V(r)$ のうち, 特に三次元の **Coulomb** (クーロン) **ポテンシャル**の場合

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha \text{ は正の実定数})$$

を考えよう．この場合の Schrödinger 方程式ないしハミルトニアンは**水素原子型**と呼ばれるが, 束縛状態の定常解を解析的に全て決定することができる．

水素原子型の動径方向の Schrödinger 方程式 (1.3.2) は, $l \in \mathbb{N}$ を用いて

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu}\frac{f}{r^2} - \alpha\frac{f}{r} = Ef$$

であった．これ以降, 簡単のため $\mu = \hbar = \alpha = 1$ とし (あるいは $r\sqrt{2\mu}/\hbar$ を r に, $2\mu E/\hbar^2$ を E に置き直す), $2E = -\kappa^2$ とおく．すると上の方程式は次のように書き直せる．

$$f'' + \Big(\frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2\Big) f = 0.$$

更に $f(r) = r^{l+1}e^{-\kappa r}\Lambda_l(r)$ と置くと, 次の Λ_l に関する方程式が得られる:

$$\Lambda_l'' + \Big(\frac{2(l+1)}{r} - 2\kappa\Big)\Lambda_l' + \Big(\frac{2}{r} - \frac{2\kappa(l+1)}{r}\Big)\Lambda_l = 0. \tag{1.3.3}$$

補題 1.3.2. 方程式 (1.3.3) は次の級数解を持つ．

$$\Lambda_l(r) = \sum_{j\geq 0} a_j r^j, \quad a_{j+1} = \frac{2\kappa(j+l+1) - 2}{(j+1)(j+2l+2)} a_j.$$

また, この級数 $\Lambda_l(r)$ から定まる $f(r) = r^{l+1}e^{-\kappa r}\Lambda_l(r)$ が $r \in (0,\infty)$ 上の二乗可積分関数であることと, κ が $k \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\kappa = \kappa_{k,l} := \frac{1}{k+l+1}$$

となることは同値である．その場合の級数を $\Lambda_{k,l}(r)$ と書くと, それは k 次の多項式である．

多項式解 $\Lambda_{k,l}(r)$ に対応する $f(r)$ は $f_{k,l}(r) = r^{l+1}\exp(-\kappa_{k,l}r)\Lambda_{k,l}(r)$ である．$n := k+l+1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ を用いると, $f_{k,l}(r)$ に対応するエネルギー E は次のようになる．

$$E = E_n := -\frac{1}{2n^2}.$$

以上より, 水素原子型 Schrödinger 方程式の束縛状態の定常解として, 以下のものが存在することが分かる ($\mu = \hbar = \alpha = 1$ としていることに注意).

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = r^l \exp\Big(-\frac{r}{k+l+1}\Big)\Lambda_{k,l}(r) Y_{l,m}(\theta,\phi), \quad k,l \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ |m| \leq l.$$

そのエネルギー E, つまり $H\varphi = E\varphi$ の固有値は $E = -(2(k+l+1)^2)^{-1}$ である．逆に $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定してエネルギーが $E = E_n$ となる (上で求めた形の) 定常解の次元は, $k+l+1 = n$ 及び $|m| \leq l$ を満たす組 (k,l,m) の数だから, $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$ である．

演習問題 (解答: 65 ページ)

問題 1.3.1. Laplace 作用素の極座標表示 (1.3.1) を導出せよ．

問題 1.3.2. 動径方向の Schrödinger 方程式 (1.3.2) を導出せよ．

問題 1.3.3. 補題 1.3.2 を証明せよ．

1.4　元素の周期律

表 1.4.1 は元素の周期表である．前副節で求めた水素原子型 Schrödinger 方程式はの定常解の分類を使って，周期表の構造を説明してみよう．

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 N	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	∗1 ∗1	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	∗2 ∗2	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Os	108 Ir	109 Pt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Nh	114 Fl	115 Mc	116 Lv	117 Ts	118 Og

∗1: ランタノイド

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu

∗2: アクチノイド

89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

表 1.4.1　元素の周期表

もともと周期表は，物質を構成する基本単位である元素を化学的性質の類似性に基づいて並べると周期性があることを記述するために導入された．現在では原子を原子番号順に並べたものとして理解されている．原子は正の電荷を持つ原子核と負の電荷を持つ電子からなっていて，電荷量の総和は 0 である．また原子番号は電子の個数である．従って原子を正確に記述しようとすると多体の量子力学系を考えなければならないが，ここでは第一近似として一つの電子に注目し，原子核と自分自身の電子達がつくる球対称のポテンシャルの中で運動している状況を考えよう (このような近似の仕方を中心力場の近似という)．すると注目している電子の運動は，**スピン**の自由度を除くと，水素原子型 Schrödinger 方程式で記述できる．

ここで**スピン**について簡単に説明しよう．電子は空間の自由度だけでは記述できない内部自由度を持っていることが (実は周期表の構造から逆説的にも) 知られていて，$m_S := \pm 1/2$ の二つの値を持つ．

スピン自由度と副前節の結果から，電子の状態は整数と半整数の組

$$(n, l, m, m_S), \quad n \in \mathbb{Z}_{>0},\ l \in \mathbb{Z}, 0 \leq l \leq n-1,\ m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l,\ m_S = \pm 1/2$$

で記述できる．(n, l) を固定すると，電子の状態は (m, m_S) の組の数，つまり $2(2l+1)$ 通りだけある．この $2(2l+1)$ 通りの状態を一つの**電子軌道**と呼ぶ．分光学の習慣に基づいて，(n, l) に対応する電子軌道を次の記

法で表す: n はその数字で, l は以下のように対応するアルファベットで表す.

l	0	1	2	3	4	5	...
	s	p	d	f	g	h	...

各電子軌道にある電子の数を記号のべきで表す. 例えば $(1s)^2$ は $1s$ 軌道に 2 個の電子があることを, $(1s)^2(2s)^2(2p)^3$ は $1s, 2s, 2p$ 軌道にそれぞれ $2, 2, 3$ 個の電子があることを表す.

電子軌道の記号を n が小さい順に並べると次のようになる.

$$1s;\ 2s,\ 2p;\ 3s,\ 3p,\ 3d;\ 4s,\ 4p,\ 4d,\ 4f;\ 5s,\ \dots$$

また n だけ固定したときの $\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$ 通りの状態を一つの**電子殻**と呼ぶ. $n = 1, 2, 3, \dots$ の順に, 対応する電子殻を K 殻, L 殻, M 殻, ... と呼ぶ.

さて, 原子の基底状態, つまりエネルギーが最低の状態では, **電子は低いエネルギー状態から順番に電子殻を埋めていく** (構造原理). 前副節の結果だとエネルギーは n の値のみに依存しているが, それは中心力場の近似で考えていることによるもので, 実際には遮蔽の効果 (他の電子の分布の影響) によって l の値にも依存する.

その為 $4s$ 状態のエネルギーは $3d$ 状態のエネルギーより小さくなり, 同様に $5s$ 状態のエネルギーは $4d$ 状態のエネルギーより小さくなる. エネルギーが小さい順に電子軌道を並べると以下のようになる.

	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$4s$	$3d$	$4p$	$5s$	$4d$	$5p$	$6s$	...
$n+l$	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	...

下段に $n+l$ を記したが, $n+l$ が小さい順に並んでいるのは経験則に過ぎず, 例外もある.

以上で周期表の説明の準備が整った. 周期表の左上から順番に原子を見ていき, 各原子について原子番号分の数の電子を低いエネルギー準位の電子軌道に埋めていく. 原子番号が 10 以下の場合を考えると,

(1) 水素原子 H は原子番号 1 なので電子は 1 つで, その状態は $(1s)$ である.

(2) ヘリウム原子 He は原子番号 2 なので電子は 2 つで, その状態は $(1s)^2$ である.

(3) リチウム原子 Li は原子番号 3 で, その状態は $(1s)^2(2s)$ である.

(4) ベリリウム原子 Li は原子番号 4 で, その状態は $(1s)^2(2s)^2$ である.

(5) 原子番号 $Z = 5$ (ボロン B) から 10 (ネオン Ne) までの場合は $(1s)^2(2s)^2(2p)^{Z-4}$ である.

周期表の a 行目を第 a 周期と呼ぶが, 第 a 周期において "最も外に位置する" 電子軌道, 　つまり最後に埋まる電子軌道とその状態の数をまとめると表 1.4.2 のようになる. また周期表の構造と "最も外に位置する" 電子軌道の関係を図 1.4.1 に表した.

第 a 周期	電子軌道	状態の数
1	$1s$	2
2	$2s$, $2p$	$2+6=8$
3	$3s$, $3p$	$2+6=8$
4	$4s$, $3d$, $4p$	$2+10+6=18$
5	$5s$, $4d$, $5p$	$2+10+6=18$
6	$6s$, $4f$, $5d$, $6p$	$2+14+10+6=32$
7	$7s$, $5f$, $6d$, $7p$	$2+14+10+6=32$

表 1.4.2　原子中の電子殻と電子軌道及びその状態の数

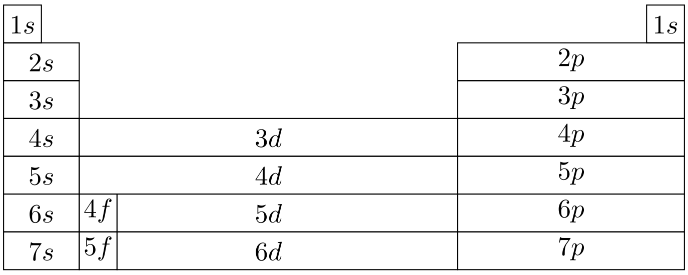

図 1.4.1　周期表の構造と電子軌道

1.5　レポート問題

補題 1.3.2 で扱った多項式 $\Lambda_{k.l}(r)$ は Laguerre (ラゲール) 陪多項式と本質的に等しいことを議論しよう．

$\Lambda_l(r)$, $l \in \mathbb{N}$ に関する方程式 (1.3.3) を次のように変数変換する: $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ として, $\kappa = 1/n$, $r = nx/2$, $Q(x) = \Lambda_l(x)$. すると方程式 (1.3.3) は

$$xQ'' + (p+1-x)Q' + kQ \ = \ 0, \quad p \ := \ 2l+1, \ \ k \ := \ n-l-1 \tag{1.5.1}$$

になる．この方程式は $k \in \mathbb{N}$ の時, 多項式

$$Q_k^p(x) \ := \ e^x x^{-p} \frac{d^k}{dx^k}\big(e^{-x}x^{k+p}\big)$$

を解にもつ．これを **Laguerre 陪多項式**という．

レポート問題 1 (解答: 77 ページ)**.** $k \in \mathbb{N}$ として, Laguerre 陪多項式 $Q_k^p(x)$ を考える．

(1) Laguerre 多項式 $Q_k^p(x)$ が方程式 (1.5.1) の解であることを確認せよ．

(2) $l \in \mathbb{N}$, $p = 2l+1$ の時, 多項式 $\Lambda_{k,l}(r)$ と Laguerre 多項式 $Q_k^p(x) = Q_k^{2l+1}\big(2r/(k+l+1)\big)$ が定数倍を除いて一致することを示せ．

(3) $l \in \mathbb{N}$, $p = 2l+1$ を固定した Laguerre 陪多項式の族 $\{Q_k^p(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ が次の直交性を持つことを示せ．但し $\delta_{j,k}$ は Kronecker デルタ (§0.1 参照).

$$\int_0^\infty e^{-x}x^p Q_j^p(x) Q_k^p(x)\, dx \ = \ \delta_{j,k}\, k!\,(k+p)!.$$

2 SO(3) と SU(2) (11/16)

今回の内容は参考書 [山杉, II 章] に基づく.

問題 2.0.1 (解答は 67 ページ)**.** 群の定義を述べよ.

問題 2.0.2. 線形空間 V 上の正則 (可逆) な線形変換全体のなす集合 $\mathrm{GL}(V)$ が群であることを示せ.

2.1 回転群 $\mathrm{O}(n)$

この副節では [山杉, II §1] に従って n 次回転群 (または特殊直交群) $\mathrm{SO}(n)$ を導入する.

n を正の整数とする. n 次元の**実線形空間**を $\mathbb{R}^n$ と表し, その元を $x = (x_1, \dots, x_n)$ のように表す. また **Euclid 内積** $(x, y) := \sum_{k=1}^n x_k y_k$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ でもって $\mathbb{R}^n$ を内積空間とみなす. Euclid 内積から定まる **Euclid ノルム**を $\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ で表す. この内積空間から自然に定まる **n 次元 Euclid 空間**を E^n と表す. これは, $\mathbb{R}^n$ とその上の二変数関数

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.1.1}$$

の組 $(\mathbb{R}^n, d)$ が定める距離空間のことであった (問題 2.1.1).

補題 2.1.1. 上記の $\|x\|$ 及び $d(x, y)$ は以下の主張を満たす.

(1) **中線定理**: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(2) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x, y)$.

(3) **Schwarz の不等式** $|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$. 更に, ここで等式が成立することと x と y が線形従属であることは同値.

定義 2.1.2. 任意の二点の距離を変えない写像 $f : E^n \to E^n$, 即ち任意の $x, y \in E^n$ に対し $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ となる写像のことを E^n の**合同変換**と呼ぶ.

合同変換の例を挙げよう (証明は問題 2.1.3).

例 2.1.3. (1) $a \in E^n$ として, **a による平行移動** $E^n \to E^n$, $x \mapsto x + a$ は E^n の合同変換である.

(2) **直交行列**とは $A^{-1} = {}^T\!A$ となる実正則行列 A のことであった. n 次直交行列 A の積で定まる写像 $E^n \to E^n$, $x \mapsto Ax$ を **n 次直交変換**と呼ぶが, これも E^n の合同変換である.

n 次直交行列全体のなす集合を $\mathrm{O}(n)$ と書く. 即ち

$$\mathrm{O}(n) := \{A \mid n \text{ 次正則実行列}, \ A^{-1} = {}^T\!A\}.$$

直交行列の特徴づけを思い出しておこう (証明は問題 2.1.4):

補題 2.1.4. n 次の実正方行列 A に対して以下の三条件は同値である.

(i) A は直交行列である.

(ii) Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ に関して, $(Ax, Ay) = (x, y)$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して成立する.

(iii) $\|Ax\| = \|x\|$ が任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して成立する.

Euclid 空間 E^n の合同変換は, 次の意味で例 2.1.3 によって尽くされている.

命題 2.1.5. **E^n の合同変換は平行移動と直交変換の合成で書ける**. より正確には, 任意の E^n の合同変換 f に対し, $a \in E^n$ と $A \in \mathrm{O}(n)$ が存在して

$$f(x) \;=\; Ax + a \quad \forall x \in E^n.$$

更に, このような a と A の組 (a, A) は f に対して一意に決まる.

命題 2.1.5 の証明. 後半の一意性については問題 2.1.5 (2) とする. 前半について, f を E^n の合同変換とする. $a := f(0)$ として $g : E^n \to E^n$ を $g(x) := f(x) - a$ で定める. a と g の定め方から

$$g(0) \;=\; 0; \quad \|g(x) - g(y)\| \;=\; \|x - y\| \quad \forall x, y \in E^n \tag{2.1.2}$$

が成立することが分かる. 特に後者で $y = 0$ として

$$\|g(x)\| \;=\; \|x\|, \quad \forall x \in E^n. \tag{2.1.3}$$

よって g が線形変換であることが示せれば, それは正方行列の積で書けるのだから, 補題 2.1.4 より直交行列 A でもって $g(x) = Ax$ と書けることが分かる. そこで以下では g が線形変換であることを示す.

準備としていくつか等式を証明しておく. 中線定理 (補題 2.1.1 (1)) を用いて

$$\|g(x) + g(y)\| \;=\; \|x + y\| \quad \forall x, y \in E^n \tag{2.1.4}$$

が示せる (問題 2.1.5 (1)). 特に $y = -x$ として

$$g(-x) \;=\; -g(x) \quad \forall x \in E^n. \tag{2.1.5}$$

更に補題 2.1.1 (2) を用いて, Euclid 内積について

$$(g(x), g(y)) \;=\; (x, y) \quad \forall x, y \in E^n \tag{2.1.6}$$

では g の線形性を示そう. まず任意の $t \in \mathbb{R}$ と $x \in E^n$ に対して $g(tx) = tg(x)$ を示したい. (2.1.2) の前半より $x \neq 0$ と仮定して良い. すると (2.1.3) より $g(x) \neq 0$. また (2.1.6) から

$$|(g(tx), g(x))| \;=\; |(tx, x)| \;=\; |t| \, \|x\|^2 \;=\; \|g(tx)\| \, \|g(x)\|.$$

つまり Schwarz の不等式で等号が成立する場合なので, ある $s \in \mathbb{R}$ でもって $g(tx) = sg(x)$ となる. $s = t$ を示せば良い. (2.1.5) より $t > 0$ と仮定して良い. すると $(tx, x) > 0$ だから, $(g(tx), g(x)) = (tx, x)$ より $s > 0$ が従う. このとき (2.1.3) から

$$s \, \|x\| \;=\; s \, \|g(x)\| \;=\; \|g(tx)\| \;=\; \|tx\| \;=\; t \, \|x\|.$$

よって $s = t$ が示せた.

次に任意の $x, y \in E^n$ に対して $g(x + y) = g(x) + g(y)$ を示したい. (2.1.3) から

$$\|g(x + y)\| \;=\; \|x + y\|. \tag{2.1.7}$$

また (2.1.6) から

$$(g(x + y), g(x) + g(y)) \;=\; (x + y, x) + (x + y, y) \;=\; \|x + y\|^2. \tag{2.1.8}$$

すると (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) から

$$\|g(x+y)-(g(x)+g(y))\|^2 \;=\; \|g(x+y)\|^2 - 2\,(g(x+y), g(x)+g(y)) + \|g(x)+g(y)\|^2 \;=\; 0.$$

□

命題 2.1.5 から次の主張が従う.

命題 2.1.6. E^n の合同変換全体について以下の主張が成立する.

(1) E^n の合同変換全体は群をなす. これを E^n の**合同変換群**と呼ぶ.

(2) E^n の合同変換群のうち直交変換たちは部分群をなす. それを $\mathrm{O}(n)$ で表して**直交変換群**と呼ぶ.

証明. (1) 二つの合同変換 f, g の積 $f \cdot g : E^n \to E^n$ を写像の合成で定義する: $(f \cdot g)(x) := f(g(x))$. 写像の合成の結合性から積の結合性 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ が従う. また恒等変換 $\mathrm{id} : E_n \to E_n$ は合同変換であり, 積について単位元である. 合同変換 f の逆元は, 命題 2.1.5 を用いて $f(x) = Ax + a$ と書くと

$$f^{-1}(x) \;:=\; A^{-1}x - A^{-1}a$$

で与えられる (問題 2.1.6). ここで $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ に注意する.

(2) 直交行列の集合 $\mathrm{O}(n)$ が掛け算で閉じていること, 単位行列を含むこと, 逆行列を取る操作で閉じていることから従う.

□

直交行列の行列式は ± 1 であった (問題 2.1.7). 行列式が $+1$ の場合に名前を付けておく.

定義 2.1.7. 行列式が 1 である直交行列 A を**特殊直交行列**と呼び, それが定める E^n の合同変換 $x \mapsto Ax$ を E^n **の回転**と呼ぶ. また特殊直交行列がなす $\mathrm{O}(n)$ の部分群を $\mathrm{SO}(n)$ と書き, E^n **の回転群**または n **次特殊直交群**と呼ぶ. つまり, 集合としては

$$\mathrm{SO}(n) \;:=\; \{A \mid n \text{ 次実行列}, \det(A) = 1,\; A^{-1} = {}^{T}\!A\}.$$

低次元の Euclid 空間の回転群を具体的に記述しよう.

補題 2.1.8. n 次特殊直交行列群 $\mathrm{SO}(n)$ について,

(1) $n = 1$ の場合, $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ は自明な群である.

(2) $n = 2$ の場合は

$$\mathrm{SO}(2) \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

証明は問題 2.1.8 とする. θ は原点周りの回転角を表している. 特に $\mathrm{SO}(2)$ **は無限群**である.

次に SO(3) の群としての生成元について考えよう.

命題 2.1.9. 三次元 Euclid 空間 E^3 の直交する三つのベクトル e_1, e_2, e_3 を取り, 各 e_j を軸とする回転がなす群を H_j と書く. このとき三次回転群 $\mathrm{SO}(3)$ は H_j のうちの二つ, 例えば H_2 と H_3 で生成される. 更に精密に述べると, 任意の $g \in \mathrm{SO}(3)$ に対して

$$g \;=\; rst \quad (\exists\, r, t \in H_3,\; \exists\, s \in H_2).$$

証明. ベクトル ge_3 に対して e_3 軸回りの回転 r_1 を施して, ベクトル r_1ge_3 が (e_1, e_3) 平面にあるようにする. 次に e_2 軸回りの回転 s_2 を施して, $s_2r_1ge_3 = e_3$ となるようにする. $t := s_2r_1g$ は e_3 軸を動かさないので $t \in H_3$ である. $r := r_1^{-1}$, $s := s_2^{-1}$ とすれば $r \in H_3$, $s \in H_2$ かつ $g = rst$ となる. □

命題 2.1.9 について, e_j 軸回りの角度 θ の回転を $R(j, \theta) \in \mathrm{SO}(3)$ と書くと, 直交基底 (e_1, e_2, e_3) に関する $R(j, \theta)$ の表現行列は以下のようになる.

$$R(1,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R(2,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R(3,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.1.9}$$

演習問題 (解答: 67 ページ)

問題 2.1.1. 一般の集合上の距離の定義を述べ, (2.1.1) の $d(x, y)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ.

問題 2.1.2. 補題 2.1.1 を示せ.

問題 2.1.3. 直交変換が E^n の合同変換であることを示せ.

問題 2.1.4. 補題 2.1.4 を証明せよ.

問題 2.1.5. 命題 2.1.5 の証明について,

(1) (2.1.4) を示せ.

(2) 後半の一意性を示せ.

問題 2.1.6. 命題 2.1.6 (1) の証明で f^{-1} が f の逆元であることを確かめよ.

問題 2.1.7. 直交行列の行列式が ± 1 であることを示せ.

問題 2.1.8. 補題 2.1.8 の $n = 2$ の場合を証明せよ.

2.2 二次特殊ユニタリ群 SU(2) と三次回転群 SO(3)

複素行列 $A = [a_{ij}]$ に対しその**随伴行列**または **Hermite (エルミート) 転置行列**を $A^* := [\overline{a_{ji}}]$ と表す.

定義 2.2.1. n を正整数とする.

(1) n 次ユニタリ行列, つまり複素正則行列 U であって $U^* = U^{-1}$ となるもののなす群を

$$\mathrm{U}(n) := \{U \mid n \text{ 次複素正則行列}, \ U^* = U^{-1}\}$$

と書き, n **次ユニタリ群**と呼ぶ.

(2) n 次ユニタリ群のうち行列式が 1 のもののなす部分群を

$$\mathrm{SU}(n) := \{U \in \mathrm{U}(n) \mid \det(U) = 1\} = \{U \mid n \text{ 次複素正方行列}, \ \det(U) = 1, \ U^* = U^{-1}\}$$

と書き, n **次特殊ユニタリ群**と呼ぶ.

$\mathrm{U}(n)$ と $\mathrm{SU}(n)$ が実際に群であることに注意する (問題 2.2.1).

この節の主目標は次の定理の証明である.

定理 2.2.2. SU(2) から SO(3) への全射群準同型であって, 核が $\{\pm I\}$ であるものが存在する. 但し I は単位行列.

まず $\mathrm{U}(n)$ や $\mathrm{SU}(n)$ に付随する Lie (リー) 環と随伴表現を導入する. 複素正方行列 A の指数関数 $\exp A$ の定義を思い出しておこう (問題 2.2.2).

$$\exp A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

定義 2.2.3. $G = \mathrm{U}(n)$ または $\mathrm{SU}(n)$ とする. n 次複素行列 X であって, 任意の実数 t に対して $\exp(tX) \in G$ となるもの全体のなす集合を **(Lie 群) G の Lie 環**と呼び, $\mathrm{Lie}\, G$ で表す. また次の記号を用いる.

$$\mathfrak{u}(n) := \mathrm{Lie}\,\mathrm{U}(n), \quad \mathfrak{su}(n) := \mathrm{Lie}\,\mathrm{SU}(n).$$

複素正方行列 X が Hermite 交代行列であるとは $X + X^* = 0$ となることをいうのであった.

命題 2.2.4. ユニタリ群及び特殊ユニタリ群の Lie 環について, 以下の主張が成立する.

$$\mathfrak{u}(n) = \{n \text{ 次 Hermite 交代行列}\}, \quad \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}.$$

証明. まず $\mathfrak{u}(n)$ について. $\exp(tX) \in \mathrm{U}(n) \iff \exp(tX)\big(\exp(tX)\big)^* = I \iff \exp(tX)\exp(tX^*) = I$ に注意する. 左辺の $t = 0$ における微分係数は

$$\frac{d}{dt}\big(\exp(tX)\exp(tX^*)\big)\Big|_{t=0} = \Big(X\exp(tX)\exp(tX^*) + \exp(tX)\exp(tX^*)X^*\Big)\Big|_{t=0} = X + X^*.$$

従って $X \in \mathfrak{u}(n)$ ならば X は Hermite 交代行列である. 逆に X が Hermite 交代行列なら, 任意の実数 t に対し

$$\exp(tX)\exp(tX)^* = \exp(tX)\exp(tX^*) = \exp(tX)\exp(-tX) = I$$

となるので, $X \in \mathfrak{u}(n)$ である.

次に $\mathfrak{su}(n)$ について．$\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{U}(n)$ なので, Lie 環の定義より $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$ である．従って $X \in \mathfrak{su}(n)$ が任意の実数 t について $\exp(tX) \in \mathrm{SU}(n)$, つまり $\det\exp(tX) = 1$ となる条件を求めればよい．任意の正方行列 A に対して $\det\exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$ だから (問題 2.2.3), 求める条件は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $t \operatorname{tr} X \in 2\pi i\mathbb{Z}$ となること, つまり $\operatorname{tr} X = 0$ である． □

命題 2.2.4 の記述から, $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ の Lie 環 $\mathrm{Lie}\, G$ は実線形空間であることが分かる (問題 2.2.4).

以下 $(G, \mathfrak{g}) = (\mathrm{U}(n), \mathfrak{u}(n))$, $(\mathrm{SU}(n), \mathfrak{su}(n))$ と組にして考える．$\mathfrak{g}$ は線形空間なので, その上の正則な線形写像全体のなす群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ を考えることができる (問題 2.0.2).

命題 2.2.5. $g \in G$ に対して写像 $\mathrm{Ad}\, g$ を

$$(\mathrm{Ad}\, g)(X) := gXg^{-1} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

と定義すると, $\mathrm{Ad}\, g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ である．更に写像 Ad を

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \longmapsto \mathrm{Ad}\, g$$

で定義すると, これは群の準同型である．この群準同型 Ad を G の**随伴表現**と呼ぶ.

随伴「表現」という名前の由来は次回の §3.2 で説明する (例 3.2.2).

証明. 前半について．$\mathrm{Ad}\, g$ が線形写像であることは, $a, b \in \mathbb{C}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $(\mathrm{Ad}\, g)(aX + bY) = g(aX + bY)g^{-1} = agXg^{-1} + bgYg^{-1} = a(\mathrm{Ad}\, g)(X) + b(\mathrm{Ad}\, g)(Y)$ となることから従う．また $\mathrm{Ad}\, g$ の像が $\mathfrak{g}$ に含まれること, 即ち $(\mathrm{Ad}\, g)(X) \in \mathfrak{g}$ となることは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\exp\bigl(t(\mathrm{Ad}\, g)(X)\bigr) = \exp(tgXg^{-1}) = g\exp(tX)g^{-1} \in G$$

となることから従う．$\mathrm{Ad}\, g$ が正則であることをいうには逆写像を求めればよいが, それは $\mathrm{Ad}\, g^{-1}$ である．実際, $(\mathrm{Ad}\, g^{-1})(\mathrm{Ad}\, g)(X) = g^{-1}gXgg^{-1} = X$, $(\mathrm{Ad}\, g)(X)(\mathrm{Ad}\, g^{-1}) = gg^{-1}Xg^{-1}g = X$ である．

後半について．$g, h \in G$ に対して $(\mathrm{Ad}\, g)(\mathrm{Ad}\, h)(X) = ghXh^{-1}g^{-1} = (\mathrm{Ad}\, gh)(X)$ となる．また上記の逆写像に関する議論から $(\mathrm{Ad}\, g)^{-1} = (\mathrm{Ad}\, g^{-1})$. そして $\mathrm{Ad}\, I = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ なので, Ad は群準同型である． □

次に Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積を導入する．

補題 2.2.6. 双線形写像 $(\ ,\ ) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(X, Y) := \operatorname{tr}(XY^*)$$

とすることで定めると, これは $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積である．

証明. $(\ ,\ )$ が対称であること, つまり $(X, Y) = (Y, X)$ であることは, $X, Y \in \mathfrak{g}$ なら $X + X^* = 0$, $Y + Y^* = 0$ だから $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^*) = -\operatorname{tr}(XY) = -\operatorname{tr}(YX) = \operatorname{tr}(YX^*) = (Y, X)$ となって示せた．次に $(\ ,\ )$ が実数値であることを確認すると, トレースが転置を取っても不変であることに注意して, $\overline{(X, Y)} = \operatorname{tr}(\overline{X^T}Y) = \operatorname{tr}(YX^*) = (Y, X) = (X, Y)$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ の場合の非退化性について．$E_{j,k}$ で (j, k) 成分が 1, 他の成分が 0 の n 次行列 (行列単位) を表すと, $\{E_{j,k} - E_{k,j}, iE_{j,k} + iE_{k,j} \mid j < k\} \cup \{iE_{j,j}\}$ は $\mathfrak{u}(n)$ の基底をなす．$X \in \mathfrak{u}(n)$ がこの基底の任意の元 Y に対して $(X, Y) = 0$ を満たすと仮定する．$X = [x_{jk}]$ とおけば $XE_{j,k}$ の (a, b) 成分が $x_{aj}\delta_{b,k}$ となることから $\operatorname{tr}(XE_{j,k}) = x_{kj}$. $Y = E_{j,k} - E_{k,j}$ の場合の仮定から $x_{kj} = x_{j,k}$ $(j < k)$, $Y = iE_{j,k} + iE_{k,j}$ の場合の仮

定から $x_{kj} = -x_{j,k}$ $(j < k)$, $Y = iE_{j,j}$ の場合の仮定から $x_{jj} = 0$ となるので $X = 0$. よって $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ の場合に $(\ ,\ )$ が内積であることが示せた.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ の場合の非退化性については, $\mathfrak{su}(n)$ の基底として $\{E_{j,k} - E_{k,j}, iE_{j,k} + iE_{k,j} \mid j < k\} \cup \{iE_{j,j} - E_{j+1,j+1}\}$ からなるものを取って同様の議論をすれば, $X \in \mathfrak{su}(n)$ について $x_{kj} = x_{j,k}$ $(j < k)$, $x_{kj} = -x_{j,k}$ $(j < k)$ 及び $x_{jj} - x_{j+1,j+1} = 0$ が得られるので, $\operatorname{tr} X = 0$ と合わせてやはり $X = 0$ となる.

正定値であることは $(X, X) = \sum_{i,j} |x_{ij}|^2$ となることから従う. □

補題 2.2.6 を距離空間の言葉で言い換えると, 次の主張を得る.

補題 2.2.7. 補題 2.2.6 の正定値内積 $(\ ,\ )$ で Lie 環 $\mathfrak{g}$ を距離空間とみなすと, それは Euclid 空間 E^N, $N := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ と同型である.

この内積と Ad の関係は次の通り. 証明は問題 2.2.7 とする.

補題 2.2.8. 補題 2.2.6 の内積 $(\ ,\ )$ は Ad 不変である. つまり任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ と $g \in G$ に対して

$$\big((\operatorname{Ad} g)(X), (\operatorname{Ad} g)(Y)\big) = (X, Y).$$

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ を保つ $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の元は, 補題 2.2.7 より直交行列とみなせる. それらのなす集合を $\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ と書けば, これは $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群であり, 群として $\mathrm{O}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{O}(N)$, $N := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ である. そして補題 2.2.8 より $\operatorname{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の像は $\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ に含まれる. つまり

$$\operatorname{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{O}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{O}(N)$$

となっている. 更に G の連結性を考慮すると, Ad の像を更に絞りこむことができる.

補題 2.2.9. n 次複素行列全体の集合 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を $2n^2$ 次元実線形空間とみなし, Euclid 位相を入れる. またユニタリ群と特殊ユニタリ群 $G = \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ を $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ の部分集合とみなし, Euclid 位相の相対位相を入れる. このとき G は連結である.

証明. 任意のユニタリ行列 U に対し, ユニタリ行列 S が存在して $U = S \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) S^{-1}$ と対角化できることに注意する. 区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{U}(n)$ への連続写像 $t \mapsto S \operatorname{diag}(e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_n})$ を考えると, これは単位行列 I と U を結ぶ道を与える. よって $\mathrm{U}(n)$ は弧状連結であり, 従って連結である. 同じ議論が特殊ユニタリ群についても適用できる. □

$\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ の元であって行列式が 1 であるもののなす部分群を $\mathrm{SO}(\mathfrak{g})$ と書く. $\mathrm{O}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{O}(N)$, $N := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ と同じ理由によって $\mathrm{SO}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{SO}(N)$ となる. G の連結性から次の主張が示せる.

命題 2.2.10. 随伴表現 $\operatorname{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の像は $\mathrm{SO}(\mathfrak{g})$ に含まれる. つまり

$$\operatorname{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{SO}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{SO}(N).$$

証明. 行列式が定める写像 $\det : G \to \mathbb{R}$ を考える. 行列式は行列の成分の多項式だから, G の位相の定め方 (補題 2.2.9) から det は連続写像である. $\operatorname{Ad}(G) \subset \mathrm{O}(N)$ と直交行列の行列式が ± 1 であること (問題 2.1.7) から $\det \circ \operatorname{Ad} : G \to \{\pm 1\}$ となる. Ad は行列の成分の有理式で書けることからやはり連続写像なので, $\det \circ \operatorname{Ad}$ は連続である. 補題 2.2.9 より G は連結で, 連続写像による連結空間の像は連結だから, $(\det \circ \operatorname{Ad})(G) \subset \{\pm 1\}$ は一元集合である. 単位元 e について $(\det \circ \operatorname{Ad})(e) = 1$ だから, 結局 $(\det \circ \operatorname{Ad})(G) = \{1\}$. つまり $\operatorname{Ad}(G)$ の元の行列式は 1 であり, 従って $\operatorname{Ad}(G) \subset \mathrm{SO}(N)$ となる. □

さて本題の定理 2.2.2 に戻る．命題 2.2.10 で $G = \mathrm{SU}(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ としよう．$\mathfrak{su}(2)$ の次元 N は問題 2.2.4 より $N = 3$ である．目的の全射群準同型は $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ で与えられる，というのが結論である．まず Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の構造を調べよう．

補題 2.2.11. Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の線形空間としての基底として，以下の (e_1, e_2, e_3) が取れる．

$$e_1 := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

証明. $\mathfrak{u}(2)$ の元，つまり 2 次の Hermite 交代行列が $\left[\begin{smallmatrix} ci & -a+bi \\ a+bi & -ci \end{smallmatrix}\right]$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ と書けることから従う． □

次に $\mathfrak{su}(2)$ の基底 (e_1, e_2, e_3) を用いて，SU(2) の元 (問題 2.2.5)

$$h_\theta := \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}, \quad k_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{2.2.1}$$

から定まる $\mathrm{Ad}\, h_\theta \in \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$ を調べよう．

補題 2.2.12. 補題 2.2.11 の基底 (e_1, e_2, e_3) に関する $\mathrm{Ad}\, h_\theta$ と $\mathrm{Ad}\, k_\theta$ の表現行列は

$$\mathrm{Ad}\, h_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(3, 2\theta), \quad \mathrm{Ad}\, k_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R(2, 2\theta).$$

但し $R(j, \theta)$ は (2.1.9) で与えた SO(3) の元.

証明. $(\mathrm{Ad}\, h_\theta)(e_j)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}\, h_\theta)(e_1) &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & ie^{2i\theta} \\ ie^{-2i\theta} & 0 \end{bmatrix} = e_1 \cos 2\theta + e_2 \sin 2\theta, \\
(\mathrm{Ad}\, h_\theta)(e_2) &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{bmatrix} = -e_1 \sin 2\theta + e_2 \cos 2\theta, \\
(\mathrm{Ad}\, h_\theta)(e_3) &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = e_3.
\end{aligned}$$

$\mathrm{Ad}\, k_\theta$ に関しても同様で，詳細は問題 2.2.6 にする． □

ここで命題 2.1.9 を思いだすと，$\mathrm{Ad}\, h_\theta = R(3, 2\theta)$ と $\mathrm{Ad}\, k_\theta = R(2, 2\theta)$ 達は SO(3) を生成する．命題 2.2.10 より $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(3)$ だから，次の結果が得られたことになる．

命題 2.2.13. 随伴表現 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$ は SO(3) への全射である．

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3).$$

これで定理 2.2.2 の全射準同型が Ad で与えられることが分かった．残っているのは核の記述である．

定理 2.2.2 の後半の証明. $\mathrm{Ad}\, g = \mathrm{id} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$ となる $h \in \mathrm{SU}(2)$ を全て決定しよう．引き続き補題 2.2.11 の $\mathfrak{su}(2)$ の基底 (e_1, e_2, e_3) を用いる．$(\mathrm{Ad}\, g)(e_3) = e_3$ から $ge_3 = e_3 g$ となるが， $g = [g_{jk}]$ と成分をおけば

$$\begin{bmatrix} ig_{11} & ig_{12} \\ -ig_{21} & -ig_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_{11} & -ig_{12} \\ ig_{21} & -ig_{22} \end{bmatrix}$$

となるので, $g_{12} = g_{21} = 0$ である．よって $g = \mathrm{diag}(a, a^{-1})$ の形に置き直せる．次に $(\mathrm{Ad}\, g)(e_2) = e_2$ から $ge_2 = e_2 g$ となって, 成分表示すると

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $a^2 = 1$, つまり $g = \pm I$ となる必要がある．逆に $g = \pm I$ ならば $\mathrm{Ad}\, g = \mathrm{id}$ だから, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{Ad} = \{\pm I\}$. □

演習問題 (解答: 68 ページ)

問題 2.2.1. $\mathrm{U}(n)$ が群であること, $\mathrm{SU}(n)$ が $\mathrm{U}(n)$ の部分群であることを示せ.

問題 2.2.2. 複素正方行列 A の指数関数 $\exp A := \sum_{n\geq 0} A^n/n!$ について, 以下の主張を示せ.

(1) 任意の複素正方行列 A に対して, 級数 $\sum_{n\geq 0} A^n/n! = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n/n!$ は収束する.

(2) 同じサイズの複素正方行列 A と B が可換, つまり $AB = BA$ ならば, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

(3) 同じサイズの複素正方行列 A と B であって $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ となるものの例を挙げよ.

問題 2.2.3. 任意の複素正方行列 A に対して $\det \exp(A) = \exp(\mathrm{tr}\, A)$ となることを示せ.

問題 2.2.4. $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ が実線形空間であることを確認し, それらの実線形空間の次元を求めよ.

問題 2.2.5. (2.2.1) の行列 h_θ と k_θ が $\mathrm{SU}(2)$ の元であることを示せ.

問題 2.2.6. $\mathrm{Ad}\, k_\theta$ の表現行列が補題 2.2.12 のようになることを示せ.

問題 2.2.7. 補題 2.2.8 を示せ.

2.3　群の表現

2.3.1　群の表現の定義

天下りだが, 群の表現を導入しよう. [山杉, p.31, I §7] も参照されたい.

定義 2.3.1. **群 G の表現**とは, (体 F 上の) 線形空間 V と群準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (ρ, V) のことである. V を表現 (ρ, V) の**表現空間**と呼ぶ.

表現空間 V の次元が n の時, 表現 (ρ, V) を n **次元表現**と呼ぶこともある. また体 F が実数体 $\mathbb{R}$ の場合は**実表現**, 複素数体 $\mathbb{C}$ の場合は**複素表現**と呼ぶ. 簡単のため, 表現 (ρ, V) のことを ρ のみ, または V のみで表すこともある.

(有限次元の) 線形空間 V の基底をとれば, $\mathrm{GL}(V)$ の元, つまり線形写像 $V \to V$ は行列で表示できる. 従って群 G の表現 (ρ, V) について, 表現空間 V の基底をとれば, 各元 $g \in G$ の像 $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$ を行列で表示することができる. そして ρ は群準同型なので, $g, h \in G$ に対して $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となっている. つまり, **群 G の表現とは G の元を行列で実現したもの**と思える.

例 2.3.2. 群の表現の例をいくつか挙げる. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする.

(1) 任意の群 G は一次元表現 $G \to \mathrm{GL}(F) = F \setminus \{0\}$, $g \mapsto 1$ を持つ. これを G の**自明表現**と呼ぶ.

(2) n 次巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対して, 一次元複素線形空間 $\mathbb{C}$ と写像

$$\rho_m : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \overline{k} \longmapsto \exp(2\pi i m k/n)$$

を考えると, $(\rho_m, \mathbb{C})$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の一次元表現である.

(3) n 次対称群 (または置換群) $\mathfrak{S}_n$ に対して, 体 F 上の n 次元線形空間 $V = Fe_1 \oplus Fe_n$ を考える. 各置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について, $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(V)$ を, 基底 e_j の像を

$$\rho(\sigma)(e_j) \;=\; e_{\sigma(j)} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

として定める. 但し $\sigma(j) \in \{1, \ldots, n\}$ は置換 σ による j の像. これで得られた写像 $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ について, (ρ, V) は $\mathfrak{S}_n$ の n 次元表現である. V の基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ に関する $\rho(\sigma)$ の行列表示について, その行列 $X(\sigma)$ の (j, k) 成分は, $k = \sigma(j)$ なら 1, k がその他の場合は 0 である. 行列 $X(\sigma)$ を σ の置換行列と呼ぶことがある. 以下が $n = 3$ の場合の置換行列のリストである.

σ	e	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
$X(\sigma)$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$

(4) 一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ について, 各正則行列 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ にそれが定める線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を対応させることで, 群の同型 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ が得られる. これは群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の n 次元表現とみなせる. そして $\mathbb{R}^n$ の標準基底に対応する g の表現行列が行列 g に他ならない.

(5) $\mathbb{R}$ をその加法によって可換群とみなすと, その正規部分群 $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ による商

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \;=\; \{\overline{\theta} = \theta \pmod{2\pi} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

も可換群である. 二次元の実線形空間 $V = \mathbb{R}^2$ と写像

$$\rho : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \overline{\theta} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

を考えると, 三角関数の加法定理から ρ は群準同型なので, (ρ, V) は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の二次元表現である. 補題 2.1.8 の SO(2) の記述を思い出すと, $\rho(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(2)$ であることが分かる.

上で注意したように群の表現は行列による群の実現と思えるから, 基底変換による行列の取り替えで移りあう二つの表現は本質的には同じものと思うのが自然である. そこで次の概念を導入する.

定義 2.3.3. 群 G の表現 (ρ, V) と (σ, W) について, 線形同型 $\gamma : V \xrightarrow{\sim} W$ であって任意の $g \in G$ に対して

$$\sigma(g)\gamma = \gamma\rho(g)$$

となるものが存在するとき, 表現 (ρ, V) と (σ, W) は**同値**であるといい, $(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$ と書き表す.

表現の同値はその名の通り同値関係を定める (問題 2.3.1).

線形空間 V と W に対し直和 $V \oplus W$ がとれたのと同様に, 群 G の**表現** (ρ_V, V) **と** (ρ_W, W) **の直和**を

$$(\rho_V \oplus \rho_W, V \oplus W)$$

で定義する. 但し群準同型 $\rho_V \oplus \rho_W : G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$ は, $g \in G$ に対して $(\rho_V \oplus \rho_W)(g) := \rho_V(g) \oplus \rho_W(g)$ で定める. V と W の基底を取り, それに対応する $\rho_V(g)$ と $\rho_W(g)$ の表現行列をそれぞれ $X(g)$ と $Y(g)$ とすれば, $\rho_V(g) \oplus \rho_W(g)$ の表現行列はブロック対角行列 $\begin{bmatrix} X(g) & \\ & Y(g) \end{bmatrix}$ である. 同様に表現の族 (ρ_j, V_j) $(j \in J)$ に対してそれらの直和 $(\bigoplus_{j \in J} \rho_j, \bigoplus_{j \in J} V_j)$ が定まる.

2.3.2　既約表現, 完全可約表現, ユニタリ表現

次に群の表現の中で重要なクラスをいくつか導入する. [山杉, II §3] も参照されたい.

まず, 群の表現のうち "一番小さいもの" にあたる既約表現を導入する.

定義 2.3.4. G を群, (ρ, V) を G の表現とする.

(1) 表現空間 V の**不変部分空間** U とは, 線形部分空間 $U \subset V$ であって任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)(U) \subset U$ となっているもののことをいう.

(2) (ρ, V) が**既約** (irreducible) または**単純** (simple) であるとは, $V \neq 0$ であり, また V の不変部分空間が 0 と V 自身のみであることをいう. 既約でない表現は**可約** (reducible) であるという.

定義より一次元表現は既約である.

表現の可約性を表現行列で理解しよう. もし表現 (ρ, V) が可約なら, $0 \subsetneq U \subsetneq V$ なる不変部分空間 U が存在する. U の基底とその V への延長をとり, $g \in G$ に対して $\rho(g)$ を行列表示するとブロック三角行列 $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ になる. 右下の 0 の部分が条件 $\rho(g)(U) \subset U$ に対応していることに注意して欲しい.

群の表現が既約表現の直和で表せる場合が重要になるので, 名前を付けておく.

定義 2.3.5. 群 G の表現 (ρ, V) が**完全可約** (completely irreducible) または**半単純** (semisimple) であるとは, G の既約表現の族 (ρ_j, V_j) $(j \in J)$ が存在して, $(\rho, V) \simeq (\bigoplus_{j \in J} \rho_j, \bigoplus_{j \in J} V_j)$ となることをいう. また, 右辺 $(\bigoplus_{j \in J} \rho_j, \bigoplus_{j \in J} V_j)$ を完全可約表現 (ρ, V) の**既約分解**と呼ぶ.

既約表現は完全可約であることに注意する. また可約性と完全可約性を混同しないこと.

完全可約性は次のように言い換えられる (有限次元表現の場合の証明は問題 2.3.2).

命題 2.3.6. 表現 V が完全可約であることと, V の任意の不変部分空間 U に対して補空間 V/U もまた不変部分空間であることは同値.

この講義では主に完全可約な表現のみを扱うが, 問題 2.3.3 で見るように完全可約でない表現も存在する.

完全可約表現の重要なクラスを与えよう. 準備として複素線形空間 V 上の線形型式についてまとめておく.

(1) V 上の**半双線形型式** (sesqui-linear form) とは, 写像 $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ であって, $v, w, x, y \in V$ と $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $(v + w, x + y) = (v, x) + (v, y) + (w, x) + (w, y)$ かつ $(av, bw) = \overline{a}b(v, w)$ が成立するもののことをいう.

(2) V 上の **Hermite 型式**とは, V 上の半双線形型式であって $(v, w) = \overline{(w, v)}$ となるもののことをいう.

(3) 正定値の Hermite 型式を**ユニタリ内積**と呼ぶ.

定義 2.3.7. 群 G の複素表現 (ρ, V) が**ユニタリ**であるとは, 表現空間 V にユニタリ内積 (v, w) が存在して, 任意の $g \in G$ と任意の $v, w \in V$ に対して次式が成立することをいう.

$$(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w).$$

群 G のユニタリ表現 (ρ, V) について, V のユニタリ内積に関する正規直交基底をとれば, それに関する $\rho(g)$, $g \in G$ の表現行列はユニタリ行列 (定義 2.2.1) である (問題 2.3.4). 逆に表現 (ρ, V) に対し, ある V の基底が存在して表現行列が全てユニタリ行列であれば, その基底を正規直交基底とする内積に関して (ρ, V) はユニタリ表現である.

与えられた表現がユニタリであることを示すには, 任意の $g \in G$ と $v \in V$ に対して $(\rho(g)v, \rho(g)v) = (v, v)$ を示せば十分であることに注意しておく (問題 2.3.5)

命題 2.3.8. ユニタリ表現は完全可約である.

証明. (ρ, V) を群 G のユニタリ表現とする. V が既約であれば完全可約なので (定義 2.3.5 の直後の註), 可約だと仮定する. すると $0 \subsetneq U \subsetneq V$ なる不変部分空間 U が存在する. このときユニタリ内積に関する U の直交補空間 $U^{\perp}$ もまた不変部分空間である. 実際, 任意の $x \in U^{\perp}$ と $y \in U$ 及び $g \in G$ に対して, $\rho(g^{-1})y = \rho(g^{-1})y = \rho(g^*)y \in U$ なので

$$(\rho(g)x, y) = (x, \rho(g^{-1})y) = (x, \rho(g^*)y) = 0$$

となり, 従って $\rho(g)x \in U$ となる. よって命題 2.3.6 より V は完全可約である. □

最後に重複度の概念を導入する.

定義 2.3.9. V を群 G の完全可約表現とし, L を G の既約表現とする. V を既約表現の直和に分解したときに現れる L の個数を, **L の V における重複度**と呼ぶ.

2.3.3 Schur の補題

表現の既約性を判定する時に役立つ Schur (シューア) の補題を紹介する.

定義 2.3.10. 群 G の表現 (ρ, V) と (σ, W) について, 線形写像 $f : V \to W$ であって任意の $g \in G$ に対して

$$\sigma(g) \circ f = f \circ \rho(g)$$

となるものを G **準同型**または**絡写像** (intertwiner) と呼び, $f : (\rho, V) \to (\sigma, W)$ と書く.

群 G の表現の同値性 (定義 2.3.3) は, 線形写像として同型な G 準同型が存在することと言い換えられる.

定理 2.3.11 (Schur の補題 1)**.** (ρ, V) と (σ, W) を群 G の既約表現とし, $f : (\rho, V) \to (\sigma, W)$ を G 準同型とする. このとき f は 0 または同型.

証明. f の核 $\operatorname{Ker} f \subset V$ は不変部分空間なので, V の既約性より $\operatorname{Ker} f = 0$ または $\operatorname{Ker} f = V$. 後者の場合は $f = 0$ である. 前者の場合について, f の像 $\operatorname{Im} f \subset W$ もまた不変部分空間なので, W の既約性より $\operatorname{Im} f = 0$ または $\operatorname{Im} f = W$ となる. 前者なら $V = W = 0$ かつ $f = 0$ であり, 後者なら f は同型である. □

次の主張も Schur の補題と呼ばれる.

定理 2.3.12 (Schur の補題 2)**.** (ρ, V) を群 G の複素既約表現とし, $f : (\rho, V) \to (\rho, V)$ を G 自己準同型とすると, 定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して $f = c\,\mathrm{id}_V$, つまり f はスカラー倍写像である.

証明. 線形写像としての f の固有値の一つを c とすると, $f - c\,\mathrm{id}_V$ は (ρ, V) の G 自己準同型であるから, Schur の補題 1 (定理 2.3.11) より $f - c\,\mathrm{id}_V$ は 0 または線形同型. 一方 c は f の固有値だったので, $f(v) = cv$ なる $v \in V \setminus \{0\}$ が存在し, $f - c\,\mathrm{id}_V$ は線形同型にはなりえない. 従って $f - c\,\mathrm{id}_V = 0$. □

この副節の最後として, Schur の補題 2 の重要な帰結を紹介しよう.

定理 2.3.13. 可換群の複素既約表現は一次元.

証明. (ρ, V) を可換群 G の複素既約表現とする. 任意の $g, h \in G$ について, $gh = hg$ より $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$. 従って, $h \in G$ を固定して考えれば, $f = \rho(h) : V \to V$ は G 自己準同型である. よって Schur の補題 2 (定理 2.3.12) より $\rho(h) = c(h)\,\mathrm{id}_V$, $c(h) \in \mathbb{C}$ と書ける. h も任意に取っていたから, V の任意の線形部分空間が不変部分空間だと分かる. V の既約性より $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ が従う. □

例 2.3.2 (1) で巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の一次元表現 ρ_m を考えたが, $m = 0, 1, \ldots, n-1$ で全ての既約表現が尽くされることが分かる.

問題 (解答: 69 ページ)

問題 2.3.1. 表現の同値 (定義 2.3.3) が同値関係を定めることを確認せよ.

問題 2.3.2. V が有限次元表現に命題 2.3.6 を証明せよ.

問題 2.3.3. 二次元の正則な上三角行列がなす集合 $T := \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right] \mid a, b, c \in \mathbb{C}, ac \neq 0\}$ を考える.

(1) T が群であることを示せ.

(2) 各 $g \in T$ が定める $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換を考えることで群準同型 $T \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ が得られる. これは T の表現として完全可約ではないことを示せ.

問題 2.3.4. 群 G のユニタリ表現 (ρ, V) について, V のユニタリ内積に関する正規直交基底をとれば, それに関する $\rho(g)$, $g \in G$ の表現行列はユニタリ行列であることを示せ.

問題 2.3.5. 群 G の表現 (ρ, V) がユニタリであるためには, 任意の $g \in G$ と $v \in V$ に対して $(\rho(g)v, \rho(g)v) = (v, v)$ となることが必要十分であることを示せ.

2.4 レポート問題

今回導入した $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ が Lie 環と呼ばれる代数構造を持つことを議論しよう.

定義. 体 F 上の線形空間を考える.

(1) **Lie 環**とは, 線形空間 $\mathfrak{g}$ と双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ であって以下の公理を満たすもののことである.

(i) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, y] + [y, x] = 0$ (反対称性).

(ii) 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi 律).

$[\ ,\ ]$ を **Lie 括弧**と呼ぶ. また $F = \mathbb{R}$ の場合は**実 Lie 環**, $F = \mathbb{C}$ の場合は**複素 Lie 環**と呼ぶ.

(2) Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ の**部分 Lie 環**とは, Lie 環 $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{h}})$ であって $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分線形空間であり, また Lie 括弧 $[\ ,\ ]_{\mathfrak{h}}$ が $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ への制限と一致するもののことをいう.

レポート問題 2 (解答: 78 ページ)**.** 以下の主張を示せ.

(1) 線形空間 V から自分自身への線形写像 $V \to V$ 全体のなす集合 $\mathrm{End}(V)$ は交換子 $[f, g] := fg - gf$ $(f, g \in \mathrm{End}(V))$ を Lie 括弧とする Lie 環である.

(2) n 次複素行列全体 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ は交換子 $[X, Y] := XY - YX$ を Lie 括弧とする実 Lie 環である.

(3) $\mathfrak{u}(n) = \{n$ 次 Hermite 交代行列 $\}$ と $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$ は (2) の実 Lie 環 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ の部分 Lie 環である.

3　Lie 群と Lie 環の表現 (11/30)

今回の内容は参考書 [山杉, III 章] に基づく.

3.1　線形 Lie 群とその Lie 環

前回, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ と特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ に対してその Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ を導入した (定義 2.2.3). より一般に, **Lie 群**に対してその Lie 環を導入することができる. この講義では簡単のため線形 Lie 群と呼ばれる Lie 群のクラスだけを扱う.

定義. n 次複素正則行列全体のなす群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (問題 2.0.2) を (n 次複素) 一般線形群と呼ぶ.

n 次複素行列全体の集合 $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ には, $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視して Euclid 位相が入れることができた (補題 2.2.9). $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid \det M \neq 0\}$$

によって $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の部分集合と見なせるので, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ に $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の相対位相を入れることができる. 以下, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は常にこの位相を入れて考えることにする.

定義 3.1.1. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群 G であって, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の中で閉じているもののことを n 次の**線形 Lie 群**と呼ぶ. ここで G が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の中で閉じているとは, 点列 $A_m \in G$, $m \in \mathbb{N}$ に対し $A = \lim_{m\to\infty} A_m \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ が存在すれば $g \in G$ となることをいう.

次の補題 3.1.2 で示すように, 前回登場した行列群 $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ は線形 Lie 群である. 証明の都合上, **特殊線形群** $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ と**実一般線形群** $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ も導入しておこう:

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}, \quad \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A = [a_{jk}] \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{a}_{jk} = a_{jk}\}.$$

補題 3.1.2. 一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$, 特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$, 実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ はいずれも線形 Lie 群である.

証明. 一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ については明らか.

ユニタリ群 $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$ については, $A = [a_{jk}]$ とすれば $\mathrm{U}(n)$ が $\sum_k a_{jk}\overline{a}_{lk} = \delta_{j,l}$ という代数方程式の解の集合とみなせて, $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ が存在して各 A_m がこの方程式の解ならば A も解であることから, $\mathrm{U}(n)$ が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ で閉じていることが分かる. $\mathrm{U}(n)$ が部分群であることは既に知っているので, 線形 Lie 群であることが示せた.

特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ も, やはり代数方程式の解集合と見なせるので, 同じ議論で線形 Lie 群であることが従う.

特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ については $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ から従う.

実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \{A = [a_{jk}] \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{a}_{jk} = a_{jk}\}$ については, $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ が存在して各 A_m の成分が実数ならその極限 A の成分も実数だから, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ で閉じていることが分かり, 部分群であることと合わせて結論が従う.

直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ については, 複素直交群 $\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid {}^T\!AA = I\}$ が線形 Lie 群であることを $\mathrm{U}(n)$ の議論と同様に示せば, $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 及び $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$

から従う. $\square$

定義 2.2.3 にならって線形 Lie 群の Lie 環を次のように定義する.

定義 3.1.3. G を n 次の線形 Lie 群とする. G **に付随した Lie 環**, または単に G **の Lie 環** $\mathfrak{g}$ を次で定義する.

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

補題 3.1.2 の $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}),\ \mathrm{U}(n),\ \mathrm{SU}(n),\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ \mathrm{O}(n),\ \mathrm{SO}(n)$ に対してはそれぞれ $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{u}(n),\ \mathfrak{su}(n),\ \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),\ \mathfrak{o}(n),\ \mathfrak{so}(n)$ と書く.

ユニタリ群と特殊ユニタリ群の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ が, 集合としては

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid X^* + X = O\}, \quad \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

であることを思いだそう (命題 2.2.4). その他の Lie 環については次のようになる.

補題 3.1.4. 一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, 実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 実特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, 直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の Lie 環は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) &= \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) = \{n\ \text{次複素正則行列}\},\\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) &= \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\},\\
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) &= \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) = \{n\ \text{次実正則行列}\},\\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) &= \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\},\\
\mathfrak{o}(n) &= \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid {}^T X + X = O\},\\
\mathfrak{so}(n) &= \mathfrak{o}(n).
\end{aligned}$$

証明. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ については, 任意の $X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ に対して $\exp(tX)$ が逆行列 $\exp(-tX)$ の正則行列であることから $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ だと分かる.

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ については, 問題 2.2.3 の $\det \exp(X) = \exp(\mathrm{tr}\, X)$ と $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ から従う.

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ については $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ と同様に示せる.

$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ については, ${}^T\!\big(\exp(tX)\big) = \exp(t^T X)$ と $\exp(tX)^{-1} = \exp(-tX)$ から ${}^T\!\big(\exp(tX)\big) = \exp(tX)^{-1} \iff \exp(t^T X) = \exp(-tX) \iff {}^T X = -X$ より従う. 但し二番目の同値は, 二番目の等式の両辺の $t = 0$ での微分係数を取ることで示される.

最後は $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid {}^T X + X = O, \mathrm{tr}\, X = 0\} = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid {}^T X + X = O\}$ より従う. $\square$

$\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ が実線形空間であり (問題 2.2.4) , 更に実 Lie 環の構造を持つこと (レポート問題 2) を思いだそう. Lie 環の定義を再掲すると:

定義 3.1.5. 体 F 上の **Lie 環**とは, F 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ と双線形写像 $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ であって以下の公理を満たすもののことである.

(i) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x,y] + [y,x] = 0$ (反対称性).

(ii) 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jacobi 律).

簡単のために Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ のことを $\mathfrak{g}$ だけで表す. また $[\,,\,]$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の **Lie 括弧**と呼ぶ.

実数体 $F = \mathbb{R}$ の場合を**実 Lie 環**, 複素数体 $F = \mathbb{C}$ の場合を**複素 Lie 環**と呼ぶ.

線形 Lie 群に付随した Lie 環と区別するために, 定義 3.1.5 の $\mathfrak{g}$ のことを**抽象 Lie 環**と呼ぶこともある.

次の命題 3.1.6 が示すように, 任意の線形 Lie 群の Lie 環も実 Lie 環の構造を持つ.

命題 3.1.6. 線形 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は, (行列環の) 交換子

$$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を Lie 括弧とする実 Lie 環の構造を持つ.

証明. まず $\mathfrak{g}$ が実線形空間であることを示す. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $aX \in \mathfrak{g}$ となることは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\exp(tX) \in G$ だから $\exp(taX) \in G$ となることから従う. 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $X + Y \in \mathfrak{g}$ となることは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp\bigl(t(X+Y)\bigr) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\right)^n \tag{3.1.1}$$

となることから従う (問題 3.1.1). 実際, $X, Y \in \mathfrak{g}$ から任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\exp(tX/n), \exp(tY/n) \in G$ であり, G は群だから積の n 乗 $g_n := \bigl(\exp(tX/n)\exp(tY/n)\bigr)^n$ も G の元である. G は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の中で閉じているから, $\lim_{n\to\infty} g_n$ も G の元である. すると (3.1.1) より $\exp(t(X+Y)) \in G$ となる. よって $X + Y \in \mathfrak{g}$ である.

次に $X, Y \in \mathfrak{g}$ なら $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$ であることを示そう. 交換子が Lie 環の公理を満たす事はレポート問題 2 で示してあるので, これで $\mathfrak{g}$ が実 Lie 環の構造をもつことが証明されたことになる. $g, h \in G$ に対して (群の) 交換子を

$$\{g, h\} := ghg^{-1}h^{-1}$$

で表すと, 任意の実数 t と $X, Y \in \mathfrak{g}$ に関して

$$\exp(t[X, Y]) = \lim_{n\to\infty}\left\{\exp\frac{tX}{n}, \exp\frac{tY}{n}\right\}^{n^2} \tag{3.1.2}$$

となる (問題 3.1.2). 後は $X + Y \in \mathfrak{g}$ と同様の議論で $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ が示せる. □

演習問題 (解答: 71 ページ)

問題 3.1.1. (3.1.1) に関して, 同じサイズの複素正方行列 X, Y に対して等式

$$\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{X}{n}\exp\frac{Y}{n}\right)^n$$

が成立することを以下の手順で証明せよ.

(1) $X = [x_{jk}]$ に対して $\|X\| := \sqrt{\sum_{j,k}|x_{jk}|^2}$ と書く. $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$ 及び $\|XY\| \le \|X\|\,\|Y\|$ を示せ.

(2) X, Y の行列値関数 $A(X, Y)$ に対して, ある実数 c が存在して, $\|X\|$ と $\|Y\|$ が十分小さい範囲で $\|A(X, Y)\| \le c\|X\|\,\|Y\|$ となる時, $A(X, Y) = O(\|X\|\,\|Y\|)$ と書く. 以下の主張が成立することを示せ.

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y) + O(\|X\|\,\|Y\|).$$

(3) $\|A-I\|<1$ である正方行列 A に対し, 級数

$$\log A := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A-I)^n$$

が収束することを示せ. これを行列 A の対数関数と呼ぶ.

(4) $\|A-I\|<1$ ならば $\exp\log A = A$, $\|A\|<\log 2$ ならば $\log\exp A = A$ となることを示せ.

(5) $\|A\| \leq a$ 及び $\|B\| \leq a$ である同じサイズの正方行列 A と B について, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\|A^n - B^n\| \leq na^{n-1}\|A-B\|$ となることを示せ.

(6) 前問 (2)–(5) を用いて $\log(\exp X\exp Y) = X+Y+O(\|X\|\,\|Y\|)$ を示せ.

(7) $\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\bigl(\exp(X/n)\exp(Y/n)\bigr)^n$ を示せ.

問題 3.1.2. (3.1.2) に関して, 同じサイズの複素正方行列 X, Y に対して等式

$$\exp[X,Y] = \lim_{n\to\infty}\left\{\exp\frac{X}{n}, \exp\frac{Y}{n}\right\}^{n^2}$$

が成立することを以下の手順で証明せよ.

(1) 実変数 t の行列値関数 $A(t)$ について, $t=0$ の近傍で $\|A(t)\|/t^k$ が有界であることを $A(t)=O(t^k)$ と書く. この時

$$\{\exp tX, \exp tY\} = \exp\bigl(t^2[X,Y]+O(t^3)\bigr)$$

となることを示せ.

(2) (1) から $\exp[X,Y] = \lim_{n\to\infty}\{\exp(X/n),\exp(Y/n)\}^{n^2}$ を示せ.

3.2　線形 Lie 群の表現と Lie 環の表現

3.2.1　線形 Lie 群の表現

次に線形 Lie 群 (定義 3.1.1) の表現を導入しよう．[山杉, III §1] も参照されたい．

線形 Lie 群の表現というと，安直には群としての表現 (ρ, V) を考えるだけなのだが，線形 Lie 群 G は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の相対位相を持っていることに注意すると，V は実線形空間で，群準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ は連続写像だとするのが自然である．

定義 3.2.1. **線形 Lie 群 G の連続表現**とは，実線形空間 V と連続な群準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (ρ, V) のことをいう．

§2.3 で扱った随伴表現を思い出そう．

例 3.2.2. $G = \mathrm{U}(n)$ または $\mathrm{SU}(n)$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ または $\mathfrak{su}(n)$ を付随する Lie 環とする．命題 2.2.5 で定義した随伴表現

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \longmapsto (\mathrm{Ad}\, g : X \mapsto gXg^{-1})$$

は定義 3.2.1 の意味での G の連続表現である．

命題 2.2.5 の証明を振り返ると，$X \in \mathfrak{g}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in G$ となることだけが使われているので，$G = \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ に限らず任意の線形 Lie 群に対して同じ議論ができる．つまり，次の命題が得られる．

命題 3.2.3. 線形 Lie 群 G に対し，表現空間を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ とし，群準同型を

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \longmapsto (\mathrm{Ad}\, g : X \mapsto gXg^{-1})$$

とすることで G の連続表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{Ad})$ が定まる．これを **G の随伴表現**という．

3.2.2　Lie 環の表現との関係

線形 Lie 群 G にはその Lie 環 $\mathfrak{g}$ が付随した (定義 3.1.3)．G の連続表現から $\mathfrak{g}$ の抽象 Lie 環としての表現を定めることができることを説明しよう．[山杉, III §3] も参照のこと．

次の補題を準備する．

補題 3.2.4. 連続写像 $g : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ が任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して $g(t+s) = g(t)g(s)$ を満たすならば，g は微分可能であり，$X := g'(0)$ とおけば $g(t) = \exp(tX)$.

証明． まず $g(0) = I$ に注意する．実際 $t = s = 0$ として $g(0)^2 = g(0)$ であり，$g(0) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ から逆行列が存在するので，それを両辺にかければよい．

g は連続写像なので，積分 $\int_a^b g(t)\,dt$ を考えることができる．微積分の基本定理から

$$\lim_{b\to a} \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)\,dt \;=\; g(a) \tag{3.2.1}$$

だが，これは b が a に十分近ければ $\int_a^b g(t)\,dt$ が正則行列であることを意味する．一方で仮定 $g(t+h) = g(t)g(h)$ から

$$\int_a^b g(t+h)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \;=\; (g(h) - I) \int_a^b g(t)\,dt$$

となり, 左辺の積分区間を平行移動すれば

$$\int_b^{b+h} g(t)\,dt - \int_a^{a+h} g(t)\,dt \;=\; (g(h)-I)\int_a^b g(t)\,dt.$$

すると上で注意した $\int_a^b g(t)\,dt$ の正則性から

$$\frac{g(h)-I}{h} \;=\; \Big(\frac{1}{h}\int_b^{b+h} g(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} g(t)\,dt\Big)\Big(\int_a^b g(t)\,dt\Big)^{-1}.$$

$h \to 0$ とすると, $g(0)=I$ 及び (3.2.1) から

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} \;=\; (g(b)-g(a))\Big(\int_a^b g(t)\,dt\Big)^{-1}$$

これで $g(t)$ が $t=0$ で微分可能であることが示せた. 右辺を X とおけば $g'(0)=X$ である.

任意の $t \in \mathbb{R}$ における微分可能性は, 再び $g(t+h)=g(t)g(h)$ から

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} \;=\; g(t)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} \;=\; g(t)X$$

となるので示せた. 結局 $g(t)$ は (行列値の) 微分方程式 $g'(t)=g(t)X$, $g(0)=I$ の解なので, 常微分方程式の解の一意性から $g(t)=\exp(tX)$ が従う. □

さて, 線形 Lie 群 $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限次元連続表現 (ρ, V) が与えられたとしよう. G の Lie 環 (定義 3.1.3)

$$\mathfrak{g} \;:=\; \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \in G\}$$

を思い出すと, 各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{GL}(V)$ に値を持つ t の連続関数

$$g_X(t) \;:=\; \rho(\exp(tX))$$

を考えることができる. 問題 2.2.2 (2) より $t,s \in \mathbb{R}$ に対して $\exp((t+s)X)=\exp(tX)\exp(sX)$ なので, ρ が群準同型であることと合わせて $g_X(t+s)=g_X(t)g_X(s)$ を得る. V の基底を取ることで $g_X(t)$ を行列と見なせば, 補題 3.2.4 が適用できて $g_X(t)$ は微分可能である. この時の微分係数 $g'_X(t)$ は V の次元分のサイズの正方行列である. 以降で基底によらない記述を用いたいので, 線形写像 $V \to V$ のなす集合 $\mathrm{End}(V)$ を用いて $g_X(t) \in \mathrm{End}(V)$ と見なす. 以上より写像

$$d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad d\rho(X) \;:=\; g'_X(0) \;=\; \left.\frac{d\rho(\exp(tX))}{dt}\right|_{t=0} \tag{3.2.2}$$

が定義できた.

表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が群準同型であったことを反映して, 写像 $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ も良い性質を持つ. その説明のためにいくつか注意をしておこう. まず, V は実線形空間なので, $\mathrm{End}(V)$ は交換子 $[A,B] := AB-BA$ を Lie 括弧とする実 Lie 環 (定義 3.1.5) である (レポート問題 2 (1)). つまり $\mathrm{End}(V)$ は線形空間であって, 交換子は反対称性と Jacobi 律を満たす双線形写像である. 一方で $\mathfrak{g}$ も交換子を Lie 括弧とする実 Lie 環であった (命題 3.1.6).

定義 3.2.5. 体 F 上の線形空間や Lie 環を考える.

(1) **Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ から $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{h}})$ への準同型**とは, 線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ であって任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$f([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [f(X), f(Y)]_{\mathfrak{h}}$$

となるもののことをいう.
Lie 環の準同型を $f : (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{h}})$ と書き表す. また Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ と略記するときは, それに合わせて Lie 環の準同型も $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ と略記する.

(2) **Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現**とは線形空間 V と Lie 環の準同型 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ の組 (σ, V) のことである.

この定義を用いると, 写像 $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ の性質を簡単に言い表すことができる.

定理 3.2.6. 線形 Lie 群 G の有限次元連続表現 (ρ, V) に対して定めた写像 $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ について,

(1) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して $\rho\big(\exp(tX)\big) = \exp\big(t \cdot d\rho(X)\big)$.

(2) $(d\rho, V)$ は $\mathfrak{g}$ の実 Lie 環としての表現である.

$\mathfrak{g}$ の表現 $(d\rho, V)$ を ρ の**微分表現**と呼ぶ.

証明. (1) $d\rho$ の定義 (3.2.2) より明らか.

(2) $d\rho$ が実線形写像であることを示す. まず $X \in \mathfrak{g}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $d\rho(aX) = a \cdot d\rho(X)$ を示したいが, (3.2.2) の記号を用いると

$$d\rho(aX) = \frac{d}{dt}\rho\big(\exp(taX)\big)\Big|_{t=0} = a\,\frac{d}{ds}\rho\big(\exp(sX)\big)\Big|_{s=0} = a \cdot d\rho(X)$$

となるので示せた. 次に $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $d\rho(X+Y) = d\rho(X) + d\rho(Y)$ を示したい. ρ が群準同型であることと (1) から, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\rho\Big(\Big(\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\Big)^n\Big) = \Big(\rho\Big(\exp\frac{tX}{n}\Big)\rho\Big(\exp\frac{tY}{n}\Big)\Big)^n = \Big(\exp\frac{t \cdot d\rho(X)}{n}\exp\frac{t \cdot d\rho(Y)}{n}\Big)^n.$$

ここで $n \to \infty$ とすると, 問題 3.1.1 の等式 $\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\big(\exp(X/n)\exp(Y/n)\big)^n$ と ρ の連続性から, 左辺は $\rho\big(\exp t(X+Y)\big) = \exp\big(t \cdot d\rho(X+Y)\big)$ に, 右辺は $\exp\big(t(d\rho(X) + d\rho(Y))\big)$ に収束する. 従って

$$\exp\big(t \cdot d\rho(X+Y)\big) = \exp\big(t(d\rho(X) + d\rho(Y))\big).$$

両辺の $t = 0$ での微分係数を比較して $d\rho(X+Y) = d\rho(X) + d\rho(Y)$ を得る.
続いて $d\rho$ が Lie 括弧を保つことを示そう. G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Lie 括弧と $\mathrm{End}(V)$ の Lie 括弧はともに交換子 $[A, B] := AB - BA$ だから, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $d\rho([X, Y]) = [d\rho(X), d\rho(Y)]$ を示せばよい. 群の交換子 $\{g, h\} := ghg^{-1}h^{-1}$ を用いる. ρ が群準同型であることと (1) から, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\rho\Big(\Big\{\exp\frac{tX}{n}, \exp\frac{tY}{n}\Big\}^{n^2}\Big) = \Big\{\rho\Big(\exp\frac{tX}{n}\Big), \rho\Big(\exp\frac{tY}{n}\Big)\Big\}^{n^2} = \Big\{\exp\frac{t \cdot d\rho(X)}{n}, \exp\frac{t \cdot d\rho(Y)}{n}\Big\}^{n^2}.$$

問題 3.1.2 の等式 $\exp[X, Y] = \lim_{n\to\infty}\big\{\exp(X/n), \exp(Y/n)\big\}^{n^2}$ を用いて, (2) と同様に $n \to \infty$ の極限を計算すると

$$\exp\big(t \cdot d\rho([X, Y])\big) = \exp\big(t[d\rho(X), d\rho(Y)]\big)$$

となるので, 結論が得られる.

□

微分表現の例を一つ紹介しよう．線形 Lie 群 G の随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ を思い出そう (命題 3.2.3)．随伴表現は G の有限次元連続表現だから, 定理 3.2.6 より微分表現 $(d\,\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ が定まる．

定義 3.2.7. 線形 Lie 群 G の随伴表現の微分表現 $(d\,\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ について, 写像 $d\,\mathrm{Ad}$ を

$$\mathrm{ad} := d\,\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

と書き, $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ.

$\mathfrak{g}$ の随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ は, 具体的には次の主張で記述される (証明は問題 3.2.1).

補題 3.2.8. 行列の交換子 $[A, B] = AB - BA$ を用いると, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y].$$

§2.3.2 で群の表現に関する不変部分空間, 既約性, 完全可約性を定義したが, それらと全く同様に (線形 Lie 群に付随するものとは限らない, 一般の) Lie 環の表現についても諸概念を定義できる.

定義 3.2.9. (σ, V) と (τ, W) を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とする.

(1) $\mathfrak{g}$ の表現 $(\sigma \oplus \tau, V \oplus W)$ を (σ, V) と (τ, W) の**直和**といい, $(\sigma, V) \oplus (\tau, W)$ と書く.

(2) 線形写像 $\varphi : V \to W$ であって, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\tau(X)\varphi = \varphi\sigma(X)$ となるもののことを $\mathfrak{g}$ **準同型**あるいは**絡写像**と呼び, $\varphi : (\sigma, V) \to (\tau, W)$ と書く.

(3) 線形同型である $\mathfrak{g}$ 準同型 $\varphi : (\sigma, V) \to (\tau, W)$ があるとき, (σ, V) と (τ, W) は**同値**であるといい. $(\sigma, V) \simeq (\tau, W)$ と書く.

定義 3.2.10. (σ, V) を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とする.

(1) (σ, V) の**不変部分空間**とは, 線形部分空間 $U \subset V$ であって任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $f(X)(U) \subset U$ となるもののことである.

(2) (σ, V) が**既約**であるとは, $V \neq 0$ かつ不変部分空間が 0 と V のみであることをいう．また既約でないことを**可約**であるという.

(3) (σ, V) が**完全可約**であるとは, 既約表現の直和と同値であることをいう.

次の定理が示すように．微分表現には元の線形 Lie 群の表現の性質のいくつかが遺伝する．但し, 線形 Lie 群 G が位相空間として連結であるときに G は連結であるということにする．ユニタリ群と特殊ユニタリ群は連結であった (補題 2.2.9)．その他の G の連結性については問題 3.2.2 及びレポート問題 3 を参照せよ.

定理 3.2.11. (ρ, V) を線形 Lie 群 G の有限次元連続表現とし, $(d\rho, V)$ をその微分表現とする.

(1) ρ に関する不変部分空間 $U \subset V$ は $d\rho$ に関する不変部分空間である.

(2) G が連結ならば, $d\rho$ に関する不変部分空間は ρ に関する不変部分空間である.

(3) G が連結ならば, ρ が既約, 可約, 完全可約であるためには, $d\rho$ が既約, 可約, 完全可約であることが必要十分.

証明. (1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して $(d\rho(X))U = \lim_{t \to 0} t^{-1}(\rho(\exp tX) - \mathrm{id})U$ であるが, 仮定から $\rho(\exp X)U \subset U$ なので $t^{-1}(\rho(\exp tX) - \mathrm{id})U \subset U$．線形部分空間 $U \subset V$ は $V = \mathbb{R}^m$, $m := \dim_{\mathbb{R}} V$ の閉集合であるから, $t \to 0$ として $(d\rho(X))U \subset U$.

(2) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\big(t \cdot d\rho(X)\big)U \subset U$ より $\big(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j (d\rho(X))^j\big)U \subset U$．$k \to \infty$ とし

て, $U \subset V$ が閉集合であることから $\big(\exp t \cdot d\rho(X)\big)U \subset U$. 以下の事実 3.2.12 より, 任意の $g \in G$ は $g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_k)$, $X_j \in \mathfrak{g}$ と書けるので, 結論が得られる.

(3) (1) と (2) から直ちに示せる.

□

上の証明で次の事実を用いた. 証明は略すので, [山杉] の該当箇所を参照されたい.

事実 3.2.12 ([山杉, III §2 V (2)]). 線形 Lie 群 G が連結ならば, 任意の $g \in G$ に対してある有限個の $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$ が存在して, $g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_k)$ と書ける.

また表現の同値類も対応する.

定理 3.2.13. 連結線形 Lie 群 G の表現 (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) が同値であるためには, 微分表現 $(d\rho_1, V_1)$ と $(d\rho_2, V_2)$ が Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現として同値であることが必要十分.

証明. $(\rho_1, V_1) \simeq (\rho_2, V_2)$ だと仮定すると, 線形同型 $f : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ であって任意の $g \in G$ に対して $f\rho_1(g) = \rho_2(g)f$ となるものが存在する. このとき, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f \circ \frac{\rho_1(\exp tX) - \mathrm{id}}{t} = \frac{\rho_2(\exp tX) - \mathrm{id}}{t} \circ f$$

だから, $t \to 0$ として $f \circ d\rho_1(X) = d\rho_2(X) \circ f$ となる. つまり $(d\rho_1, V_1) \simeq (d\rho_2, V_2)$.

逆に $(d\rho_1, V_1) \simeq (d\rho_2, V_2)$ であれば, 線形同型 $f : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ であって任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $f \circ d\rho_1(X) = d\rho_2(X) \circ f$ となるものが存在する. すると任意の $t \in \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$f \circ \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j \big(d\rho_1(X)\big)^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j \big(d\rho_2(X)\big)^j \circ f$$

となるので, $k \to \infty$ として $f \circ \rho_1(\exp tX) = \rho_2(\exp tX) \circ f$ を得る. G は連結なので事実 3.2.12 が適用できて. より任意の $g \in G$ に対して $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$. よって示せた. □

演習問題 (解答: 72 ページ)

問題 3.2.1. 補題 3.2.8 を示せ.

問題 3.2.2. 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ が連結であることを示せ.

問題 3.2.3. 体 F 上で考える. 任意の Lie 環 $\mathfrak{g}$ について,

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(F), \quad X \longmapsto 0$$

が $\mathfrak{g}$ の表現を定めることを確かめよ. これを $\mathfrak{g}$ の**自明表現**と呼ぶ.

3.3 表現のテンソル積

(線形 Lie) 群の表現及び Lie 環の表現には**テンソル積** $\otimes$ があることを説明する.

3.3.1 線形空間のテンソル積

線形空間のテンソル積, 線形写像のテンソル積, 及び (表現) 行列のテンソル積について復習しよう.

定義 3.3.1. (体 F 上の) 線形空間 V と W に対し, 次の条件を満たす線形空間 $V \otimes W$ と双線形写像 $\tau : V \times W \to V \otimes W$ の組 $(V \otimes W, \tau)$ が存在する.

- 任意の線形空間 U と双線形写像 $\varphi : V \times W \to U$ に対し, $\psi \circ \tau = \varphi$ となる線形写像 $\psi : V \otimes W \to U$ が唯一つ存在する.

線形空間 $V \otimes W$ を**線形空間 V と W のテンソル積**と呼ぶ. 係数体 F を強調したい時は $V \otimes_F W$ と書く.

テンソル積 $V \otimes W$ は同型を除いて一意に存在する. 実際, 組 (S, σ) が $(V \otimes W, \tau)$ と同じ条件を満たすなら, $\psi \circ \tau = \sigma$ 及び $\varphi \circ \sigma = \tau$ を満たす線形写像 $\psi : V \otimes W \to S$ 及び $\varphi : S \to V \otimes W$ がそれぞれ唯一つ存在するが, $\psi \circ \varphi \circ \sigma = \sigma$ 及び $\varphi \circ \psi \circ \tau = \tau$ より $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_S$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{V \otimes W}$ となって, ψ 及び φ が $V \otimes W$ と S の間の線形同型を定めることが分かる.

テンソル積 $V \otimes W$ は次のように構成する. $(v_j)_{j \in J}$ と $(w_k)_{k \in K}$ をそれぞれ V と W の基底とする. これから新たに記号 $v_j \otimes w_k$ を用意して,

$$(v_j \otimes w_k)_{(j,k) \in J \times K} \tag{3.3.1}$$

を基底とする線形空間を $V \otimes W$ とする. 双線形写像 $\tau : V \times W \to V \otimes W$ は, $(v, w) \in V \times W$ に対して $v = \sum_{j \in J} a_j v_j$, $w = \sum_{k \in K} b_k w_k$ $(a_j, b_k \in F)$ と展開しておいて,

$$\tau(v, w) \;:=\; \sum_{j \in J,\ k \in K} a_j b_k v_j \otimes w_k \tag{3.3.2}$$

と定めれば良い. この $(V \otimes W, \tau)$ が定義の条件を満たすことの証明は問題 3.3.1 とする. また以上の構成から, (3.3.1) が $V \otimes W$ の基底であること, 特に V と W が有限次元なら $V \otimes W$ も有限次元で

$$\dim V \otimes W \;=\; \dim V \dim W$$

となることが分かる.

$v \in V$ と $w \in W$ に対して $v \otimes w \in V \otimes W$ を, $\tau : V \times W \to V \otimes W$ を用いて次で定める.

$$v \otimes w \;:=\; \tau(v, w).$$

これを用いて線形写像のテンソル積を定義することができる.

定義 3.3.2. (体 F 上の) 線形写像 $f : V \to X$ と $g : W \to Y$ に対し, 線形写像 $f \otimes g : V \otimes W \to X \otimes Y$ を

$$(f \otimes g)(v \otimes w) \;:=\; f(v) \otimes g(w)$$

で定める. これを**線形写像 f と g のテンソル積**と呼ぶ.

次に線形写像のテンソル積の表現行列を考えよう．V, W, X 及び Y を有限次元線形空間とし，$(v_j)_{j\in J}$, $(w_k)_{k\in K}$, $(x_l)_{l\in L}$ 及び $(y_m)_{m\in M}$ をそれらの基底とする．また $f: V\to X$ と $g: W\to Y$ を線形写像とし，先の基底に関する f と g の表現行列をそれぞれ $A=[a_{lj}]$, $B=[b_{kl}]$ とする．つまり $f(v_j)=\sum_l x_l a_{lj}$, $g(w_k)=\sum_m y_m b_{mk}$ である．線形写像のテンソル積の定義 3.3.2 から

$$(f\otimes g)(v_j\otimes w_k) \;=\; f(v_j)\otimes g(w_k) \;=\; \sum_{l,m}(x_l\otimes y_m)a_{lj}b_{mk}$$

である．一方，(3.3.1) で議論したように，

$$(v_j\otimes w_k)_{(j,k)\in J\times K},\quad (x_l\otimes y_m)_{(l,m)\in L\times M}$$

はそれぞれ $V\otimes W$ と $X\otimes Y$ の基底だから，それらに関する $f\otimes g$ の表現行列は

$$[a_{lj}b_{mk}]_{(j,k)\in J\times K,(l,m)\in L\times M}$$

となる．$J=\{1,\dots,\dim V\}$, $K=\{1,\dots,\dim W\}$ 等と正整数に添字を置きなおすと，このサイズ $(\dim V\dim W)\times(\dim X\dim Y)$ の行列は次のようにブロック表示できる．

$$\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1\dim W} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{1\dim W} & \cdots \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2\dim W} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2\dim W} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{11}b_{\dim Y1} & a_{11}b_{\dim Y2} & \cdots & a_{11}b_{\dim Y\dim W} & a_{12}b_{\dim Y1} & a_{12}b_{\dim Y2} & \cdots & a_{12}b_{\dim Y\dim W} & \cdots \\
a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1\dim W} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1\dim W} & \cdots \\
a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{2\dim W} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2\dim W} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{21}b_{\dim Y1} & a_{21}b_{\dim Y2} & \cdots & a_{21}b_{\dim Y\dim W} & a_{22}b_{\dim Y1} & a_{22}b_{\dim Y2} & \cdots & a_{22}b_{\dim Y\dim W} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1\dim V}B \\
a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2\dim V}B \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{\dim X1}B & a_{\dim X2}B & \cdots & a_{\dim X\dim V}B
\end{bmatrix}. \tag{3.3.3}$$

定義 3.3.3. 行列 (3.3.3) を $A\otimes B$ と書いて**行列 A と B のテンソル積**と呼ぶ．

定義から正方行列のテンソル積はやはり正方行列であるが，そのトレースに関して次の公式が成立する．証明は問題 3.3.3 とする．

補題 3.3.4. 正方行列 A と B のテンソル積 $A\otimes B$ のトレースは

$$\operatorname{tr}(A\otimes B) \;=\; \operatorname{tr}A\cdot\operatorname{tr}B.$$

3.3.2 群の表現のテンソル積

線形空間及のテンソル積から群の表現のテンソル積が定義できる．

定義 3.3.5. (ρ, V) と (σ, W) を群 G の表現とする．群準同型 $\rho\otimes\sigma : G \to \mathrm{GL}(V\otimes W)$ を

$$(\rho\otimes\sigma)(g)(v\otimes w) := \rho(g)(v)\otimes\sigma(g)(w)$$

で定めることができる．これで得られる G の表現 $(\rho\otimes\tau, V\otimes W)$ を**表現** (ρ, V) **と** (σ, W) **のテンソル積**と呼び，$(\rho, V)\otimes(\sigma, W)$ または簡単に $\rho\otimes\sigma$ や $V\otimes W$ で表す．

$(\rho\otimes\sigma)(g) \in \mathrm{GL}(V\otimes W)$ であることは，$\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ と $\sigma(g)^{-1} = \sigma(g^{-1})$ より $(\rho\otimes\sigma)(g)^{-1} = (\rho\otimes\sigma)(g^{-1})$ となることから従う．また $\rho\otimes\sigma$ が群準同型であることは，ρ と σ が群準同型であることから簡単に確認できる．

3.3.3 Lie 環の表現のテンソル積

線形空間 V に対して $\mathrm{End}(V)$ は交換子を Lie 括弧とする Lie 環であった (レポート問題 2)．従って線形空間 V と W のテンソル積 $V\otimes W$ についても，$\mathrm{End}(V\otimes W)$ は交換子を Lie 括弧とする Lie 環である．また線形写像のテンソル積の定義 3.3.2 より，$f\in\mathrm{End}(V)$ に対して $f\otimes\mathrm{id}_W \in \mathrm{End}(V\otimes W)$ が定まる．ここで Lie 環の表現の定義 3.2.5 を思い出して欲しい．

定義 3.3.6. (σ, V) と (τ, W) を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とする．Lie 環の準同型 $\sigma\otimes\tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V\otimes W)$,

$$(\sigma\otimes\tau)(X) := \sigma(X)\otimes\mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V\otimes\tau(X)$$

で定まる $\mathfrak{g}$ の表現を **Lie 環の表現** (σ, V) **と** (τ, W) **のテンソル積**と呼び，$(\sigma, V)\otimes(\tau, W)$ あるいは単に $\sigma\otimes\tau$ または $V\otimes W$ で表す．

$\sigma\otimes\tau$ が Lie 環の準同型であることの証明は問題 3.3.5 とする．

演習問題 (解答: 73 ページ)

問題 3.3.1. (3.3.2) で定めた $\tau : V\times W \to V\otimes W$ がテンソル積の定義 3.3.1 を満たすことを示せ．

問題 3.3.2. 体 F 上で考える．任意の線形空間 V と一次元線形空間 F のテンソル積 $V\otimes F$ は V と同型であることを示せ．

問題 3.3.3. 補題 3.3.4 を証明せよ．

問題 3.3.4. 体 F 上で考える．群 G の任意の表現 V と自明表現 F (例 2.3.2 (1)) について $V\otimes F \simeq V$ となることを示せ．

問題 3.3.5. 定義 3.3.6 の写像 $\sigma\otimes\tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V\otimes W)$ が Lie 環の準同型であることを示せ．

問題 3.3.6. 体 F 上で考える．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の表現 V と自明表現 F (問題 3.2.3) について $V\otimes F \simeq V$ となることを示せ．

3.4 レポート問題

レポート問題 3 (解答: 78 ページ)**.** 直交群 $\mathrm{O}(n)$ の連結成分の数を求めよ．

4 SU(2) と SO(3) の表現 (12/07)

今回の内容は参考書 [山杉, II §4, III §3] に基づく.

4.1 有限次元既約表現の分類

この副節では二次特殊ユニタリ群 SU(2) と三次回転群 SO(3) の有限次元既約連続表現を分類する. [山杉, II §3] も参照されたい.

4.1.1 SO(3) と SU(2) の表現の関係

まず SO(3) と SU(2) の表現の関係を調べる. 定理 2.2.2 ないし命題 2.2.13 で示したように, SU(2) の随伴表現 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$ は SO(3) への連続な全射群準同型

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

を定める. この全射 Ad で引き戻すことで, SO(3) の連続表現 (τ, V) から SU(2) の連続表現が作れる. つまり同じ V を表現空間とし, 連続な群準同型の合成 $\tau \circ \mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V)$ を考えれば, $(\tau \circ \mathrm{Ad}, V)$ は SU(2) の表現である. この構成について, 次の主張が成立する (証明は問題 4.1.1).

補題 4.1.1. SO(3) の連続表現 (τ, V) が既約であることと SU(2) の連続表現 $(\tau \circ \mathrm{Ad}, V)$ が既約であることは同値.

SO(3) の連続表現から SU(2) の連続表現を作ることができたが, その逆は必ずしもできない. これに関しては次の主張が成立する. $-I = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ であることに注意しよう.

補題 4.1.2. SU(2) の連続表現 (ρ, V) について, $\rho = \tau \circ \mathrm{Ad}$ となる SO(3) の連続表現 (τ, V) が存在することと $\rho(-I) = \mathrm{id}_V$ であることは同値.

証明. SU(2) の連続表現 (ρ, V) が与えられていて, かつ $\rho = \tau \circ \mathrm{Ad}$ となる SO(3) の連続表現 (ρ, V) が存在するとしよう. 連続全射群準同型 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ の核は定理 2.2.2 より $\{\pm I\}$ だったから, 任意の $g \in \mathrm{SU}(2)$ に対して $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(-g)$ である. すると $\rho(g) = \tau\,\mathrm{Ad}(g) = \tau\,\mathrm{Ad}(-g) = \rho(-g)$ となる.

逆に SU(2) の連続表現 (ρ, V) が任意の $g \in \mathrm{SU}(2)$ に対して $\rho(g) = \rho(-g)$ を満たすと仮定すると, 任意の $h \in \mathrm{SO}(3)$ に対してある $g \in \mathrm{SU}(2)$ が存在して $\tau^{-1}(h) = \{\pm g\}$ となるので, $\tau(h) := \rho(\pm g)$ とすれば連続な群準同型 $\tau : \S(3) \to \mathrm{GL}(V)$ が well-defined であり, SO(3) の連続表現 (τ, V) であって $\rho = \tau\,\mathrm{Ad}$ となるものが得られる.

条件 $\rho(g) = \rho(-g)$ $(\forall\, g \in \mathrm{SU}(2))$ は $\rho(-I) = \mathrm{id}_V$ と同値なので結論が得られる. □

補題 4.1.1 と補題 4.1.2 より, SO(3) の既約連続表現 (τ, V) を全て求めるには

(1) SU(2) の既約連続表現 (ρ, V) を全て求め,

(2) そのうち条件 $\rho(-I) = \mathrm{id}_V$ を満たすものを決定し, $\rho = \tau\,\mathrm{Ad}$ となるよう τ を定める

とすれば良い.

そこで以下では SU(2) の有限次元既約連続表現を構成し, それから SO(3) の有限次元既約連続表現を決定する.

4.1.2　有限次元既約表現の構成と分類

$m \in \mathbb{N}$ とする．二変数 Z, W の $\mathbb{C}$ 係数 m 次斉次多項式がなす集合を V_m と書く ($m = 0$ の場合は $V_0 = \mathbb{C}$). V_m は $(Z^m, Z^{m-1}W, \ldots, W^m)$ を基底とする $m+1$ 次元の複素線形空間である:

$$V_m \;=\; \mathbb{C}Z^m \oplus \mathbb{C}Z^{m-1}W \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}W^m. \tag{4.1.1}$$

命題 4.1.3. 次式で定義される写像 $\rho_m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_m)$ は群準同型である．

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \rho_m(A), \quad (\rho_m(A)F)(Z, W) := F(aZ + cW, bZ + dW) \quad (\forall\, F(Z, W) \in V_m).$$

従って (ρ_m, V_m) は SU(2) の $m+1$ 次元の連続表現である．

証明. $F(aZ + cW, bZ + dW) \in V_m$ なので写像 ρ_m は Well-defined. ρ_m が群準同型であること，つまり $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ と $F \in V_m$ に対して $\rho_m(A)\rho_m(B)F = \rho_m(AB)F$ となることを示そう．$B = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right]$ 及び $Z' := aZ + cW$, $W' := bZ + dW$ とすると

$$\begin{aligned}
(\rho_m(A)\rho_m(B)F)(Z, W) &= (\rho_m(B)F)(Z', W') \;=\; F(pZ' + rW', qZ' + sW') \\
&= F\big(p(aZ + cW) + r(bZ + dW), q(aZ + cW) + s(bZ + dW)\big) \\
&= F\big((ap + br)Z + (cp + dr)W, (aq + bs)Z + (cq + ds)W\big) \\
&= (\rho_m(AB)F)(Z, W).
\end{aligned}$$

□

こうして SU(2) の表現 ρ_m が得られた．この副節の目標は次の定理の証明である．

定理 4.1.4. SU(2) の有限次元既約連続表現は命題 4.1.3 の表現 ρ_m ($m \in \mathbb{N}$) で尽くされる．

この定理の証明は幾つかあって，例えば [山杉, II] には線形 Lie 群 SU(2) のみを用いた証明が説明されている．この講義では [山杉, III] に従って，Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現を分類を利用した証明を紹介する．

§4.1.1 で SU(2) の表現と SO(3) の表現の対応を論じた．SU(2) の随伴表現が定める全射 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ がその対応の鍵であった．補題 4.1.1 とその後の注意を使うと，SU(2) の既約表現の分類定理 4.1.4 から次の SO(3) の既約表現の分類定理が得られる (証明は問題 4.1.2).

定理 4.1.5. 各 $l \in \mathbb{N}$ に対して，SO(3) の表現 (τ_l, V_{2l}) であって

$$(\tau_l \circ \mathrm{Ad})(g) \;=\; \rho_{2l}(g) \quad (\forall\, g \in \mathrm{SU}(2))$$

となるものが一意に存在する．更に SO(3) の有限次元既約連続表現は τ_l ($l \in \mathbb{N}$) 達で尽くされる．

4.1.3　Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現

SU(2) に付随する Lie 環

$$\mathfrak{su}(2) \;=\; \{X \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0,\, \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

は 3 次元の実線形空間で，交換子 $[X, Y] := XY - YX$ を Lie 括弧とする (定義 3.1.5 の意味での) 実 Lie 環の構造を持っていた．補題 2.2.11 の基底

$$e_1 \;:=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \;:=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 \;:=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

も思い出しておこう．Lie 括弧を計算すると

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2. \tag{4.1.2}$$

(σ, V) を $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元実表現としよう．Lie 環の表現の定義 3.2.5 より $\sigma : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{End}(V)$ は Lie 環の準同型だから，$\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3) \in \mathrm{End}(V)$ は (4.1.2) と同じ関係式を満たす．V の基底を選んで $\mathrm{End}(V)$ の元を行列とみなすと，$\mathfrak{su}(2)$ の有限次元実表現の分類とは，(4.1.2) の関係式を満たす三つの行列 $\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3)$ の分類に他ならない．

以下では行列

$$E := -i\sigma(e_1) - \sigma(e_2), \quad F := -i\sigma(e_1) + \sigma(e_2), \quad H := -2i\sigma(e_3)$$

を使って計算を進める．これらは次の関係式を満たす．

$$[E, F] = H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F. \tag{4.1.3}$$

定義 4.1.6. 三つの行列 (ないし考えている Lie 環の三つの元) E, F, H であって (4.1.3) を満たすものを $\mathfrak{sl}_2$ **トリプル**と呼ぶ．

名前の由来を説明しよう．(4.1.3) の E, F, H にそれぞれ σ で対応する行列

$$e := -ie_1 - e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f := -ie_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h := -2ie_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

は e_j 達の虚数倍を使っているので $\mathfrak{su}(2)$ **には含まれない**が，実は**複素** Lie 環 $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底である．

以下で説明するように，$\mathfrak{sl}_2$ トリプルは Lie 環の表現を調べる際に非常に役立つ．本題に戻って，$\mathfrak{su}(2)$ の有限次元表現 (σ, V) を一つ取って固定しよう．

命題 4.1.7. $v \in V$ が固有値 λ の H の固有ベクトル $Hv = \lambda v$ ならば，Ev は零ベクトルもしくは固有値 $\lambda + 2$ の固有ベクトルであり，Fv は零ベクトルもしくは固有値 $\lambda - 2$ の固有ベクトルである．

証明. 関係式 (4.1.3) から $H(Ev) = [H, E]v + E(Hv) = 2Ev + \lambda Ev = (\lambda + 2)Ev$, $H(Fv) = [H, F]v + F(Hv) = -2Fv + \lambda Fv = (\lambda - 2)Fv$. □

行列 H の固有値のうち，実部が最大のものを (複数ある場合は一つ選んで) λ とし，$v_\lambda \in V$ をその固有ベクトルとする．そして $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$v_{\lambda - 2k} := F^k v_\lambda \tag{4.1.4}$$

と書く．命題 4.1.7 より $v_{\lambda-2k}$ は零ベクトルもしくは固有値 $\lambda - 2k$ の H の固有ベクトルである．また $v_{\lambda+2} := 0$ と約束する．

命題 4.1.8. λ を実部が最大である H の固有値とする．$\mu = \lambda - 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ に対して v_μ を (4.1.4) で定めると

$$Ev_\mu = a_\mu v_{\mu+2}, \quad a_\mu := \frac{1}{4}\bigl(\lambda(\lambda+2) - \mu(\mu+2)\bigr).$$

証明. $k = (\lambda - \mu)/2$ に関する帰納法で示す．λ の取り方と命題 4.1.7 から $Ev_\lambda = 0$ なので，$k = 0$ の場合は成立する．$Ev_\mu = a_\mu v_{\mu+2}$ が成立するならば，

$$Ev_{\mu-2} = EFv_\mu = [E, F]v_\mu + FEv_\mu = Hv_\mu + a_\mu Fv_{\mu+2} = (a_\mu + \mu)v_\mu.$$

$a_\mu + \mu = \frac{1}{4}\bigl(\lambda(\lambda+2) - (\mu-2)\mu\bigr) = a_{\mu-2}$ より $Ev_{\mu-2} = a_{\mu-2}v_\mu$ が示せた． □

定義 4.1.9. H の固有値を表現 V の**ウェイト**と呼ぶ. V のウェイトのうち実部が最大のものを V の**最高ウェイト**と呼ぶ.

定理 4.1.10. V を $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現とする.

(1) V の最高ウェイト λ は非負整数である.

(2) $\dim V = \lambda + 1$ であり, V のウェイトは $\lambda, \lambda-2, \dots, -\lambda$ の $\lambda+1$ 個である.

(3) V の基底 $(v_\lambda, v_{\lambda-2}, \dots, v_{-\lambda})$ であって, 各 $\mu = \lambda, \lambda-2, \dots, -\lambda$ について

$$H v_\mu = \mu v_\mu, \quad F v_\mu = v_{\mu-2}, \quad E v_\mu = a_\mu v_{\mu+2}, \ a_\mu := \frac{1}{4}\big(\lambda(\lambda+2) - \mu(\mu+2)\big)$$

となるものが存在する. 但し $v_{\lambda+2} := 0$ 及び $v_{-\lambda-2} := 0$ と約束する.

証明. λ を V の最高ウェイトのうちの一つとし, $v_\lambda \in V$ をその固有ベクトルとする. 命題 4.1.7 より, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $v_{\lambda-2k} = F^k v_\lambda$ は零ベクトルもしくは固有値 $\lambda - 2k$ の H の固有ベクトルである. V は有限次元だから H の固有値の数は有限 ($\dim V$ 個) なので, $v_{\lambda-2k}$ 達は有限個を除いて零ベクトルである. そこで $v_\lambda, v_{\lambda-2}, \dots, v_{\lambda-2k+2}$ は零ベクトルではなく, かつ $v_{\lambda-2k} = 0$ だと仮定しよう ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$). すると命題 4.1.8 より $0 = E v_{\lambda-2k} = a_{\lambda-2k} v_{\lambda-2k+2}$ なので $a_{\lambda-2k} = 0$. ところで $4a_\mu = (\lambda-\mu)(\lambda+\mu+2)$ だから, $k > 0$ と合わせて $\lambda = k-1$. 以上より λ が非負整数だと分かった.

この時点で, 命題 4.1.7 と命題 4.1.8 から $v_\lambda, v_{\lambda-2}, \dots, v_{-\lambda}$ は主張の関係式を満たすことが分かる. また H の相異なる固有値の固有ベクトルだから線形独立である. これらが張る V の部分空間 U は E, F, H の作用で不変だから, SU(2) の表現としての不変部分空間だと分かる. V は既約なので $U = V$, つまり $(v_\lambda, v_{\lambda-2}, \dots, v_{-\lambda})$ は V の基底である.

□

定義 4.1.11. 定理 4.1.10 の既約表現を L_λ ($\lambda \in \mathbb{N}$) と書く. また最高ウェイト λ の固有ベクトル $v_\lambda \in L_\lambda$ を**最高ウェイトベクトル**と呼ぶ.

定理 4.1.10 を言い換えると

定理 4.1.12. $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現は, 次元が $\lambda+1$ で最高ウェイトが λ である表現 L_λ ($\lambda \in \mathbb{N}$) で尽くされる.

定理 4.1.10 の $(v_\lambda, v_{\lambda-2}, \dots, v_{-\lambda})$ は L_λ の基底だが, それに関する $\mathfrak{sl}_2$ トリプルの表現行列は以下のようになっている.

$$H \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix}, \quad E \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & a_{\lambda-2} & & & \\ & 0 & a_{\lambda-4} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{-\lambda} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad F \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1.5}$$

4.1.4 定理 4.1.4 の証明

では SU(2) の表現に話を戻そう. まず命題 4.1.3 の表現 ρ_m ($m \in \mathbb{N}$) が既約であることを示そう.

ρ_m が既約であることの証明. SU(2) は連結なので (補題 2.2.9), 線形 Lie 群とその Lie 環の表現の対応 (定理 3.2.11) が適用できる. 従って微分表現 $d\rho_m$ が既約であることを示せば良い.

この副節の冒頭では表現空間 V_m は二変数 Z, W の m 次斉次多項式の空間 (4.1.1) と定義したが, $d\rho_m$ の既約性を調べるには別の定義の方が便利なのでそれを導入する. V_m を m 次以下の x の多項式全体のなす線形空間とする. この V_m は $(x^m, x^{m-1}, \dots, 1)$ を基底に持つ $m+1$ 次元空間である:

$$V_m = \mathbb{C}x^m \oplus \mathbb{C}x^{m-1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}.$$

次元が一致するので, これは (4.1.1) と同型な線形空間である. 同型を具体的に書いてみよう. (4.1.1) の元 $F(Z,W)$ に対し, $x = Z/W$ として $f(x) := W^{-m}F(Z,W)$ で f を定めれば, それは m 次以下の一変数多項式になる. また m 次以下の一変数多項式 f に対して $F(Z,W) := W^m f(Z/W)$ とすれば逆写像が定まる.

この対応 $F \leftrightarrow f$ を使って $\rho_m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_m)$ (命題 4.1.3) を x で書き換えると次のようになる.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \rho_m(A), \quad (\rho_m(A)f)(x) = (bx+d)^m f\Big(\frac{ax+c}{bx+d}\Big) \quad (\forall\, f(x) \in V_m). \tag{4.1.6}$$

この $f(x)$ への作用を使って微分表現 $d\rho_m$ を調べよう. 補題 2.2.11 の基底 (e_1, e_2, e_3) のうち $e_3 = \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right]$ の表現行列を求めることにする. $\big(\rho_m(\exp te_3)f\big)(x) = \exp(-imt/2) f(e^{it}x)$ なので

$$\big(d\rho_m(e_3)\big)f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\rho_m(\exp te_3) - \mathrm{id}\big)f = \frac{d}{dt}\Big(e^{-imt/2}f(e^{it}x)\Big)\Big|_{t=0} = \frac{-im}{2}f + ixf'.$$

V_m の基底 $(x^k)_{k=0}^m$ については $xf' = kf$ だから $\big(d\rho_m(e_3)\big)(x^k) = i(k-m/2)x^k$. つまり $\mathfrak{sl}_2$ トリプルの $H = -2ie_3$ については

$$\big(d\rho_m(H)\big)(x^k) = (m-2k)x^k$$

となり, これは微分表現 $d\rho_m$ が $2m+1$ 次元で, 最高ウェイト m, ウェイトの集合が $\{m, m-2, \dots, -m\}$ であることを意味する.

$v \in V_m$ を最高ウェイトベクトル (定義 4.1.11) とすると, 定理 4.1.10 より, v を含む最小の不変部分空間 $U \subset V_m$ は既約表現 L_m (定義 4.1.11) と同値である. $\dim L_m = 2m+1 = \dim V_m$ なので $U = V_m$ となり, $(d\rho_m, V) \simeq L_m$, つまり $d\rho_m$ が既約であることが示せた. 従って定理 3.2.11 より ρ_m も既約である. □

微分表現 $(d\rho_m, V_m)$ が L_m と同値であることを強調しておく.

定理 4.1.4 で証明が残っているのは, 任意の有限次元既約連続表現 (ρ, V) が V_m $(m \in \mathbb{N})$ のいずれかと同型である, という部分である.

残りの部分の証明. 定理 3.2.11 より微分表現 $d\rho$ は $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現であるが, 定理 4.1.12 より $m \in \mathbb{N}$ が存在して $(d\rho, V) \simeq L_m$. よって $(d\rho, V) \simeq (d\rho_m, V_m)$. 従って定理 3.2.13 より $(\rho, V) \simeq (\rho_m.V_m)$. □

問題 (解答: 74 ページ)

問題 4.1.1. 補題 4.1.1 を証明せよ.

問題 4.1.2. SU(2) の既約表現の分類定理 4.1.4 から SO(3) の既約表現の分類定理 4.1.5 を導け.

4.2 不変積分

この副節では線形 Lie 群の上の不変積分を説明し, 指標の理論を紹介する. また, それを応用してコンパクトな線形 Lie 群の表現を議論する.

群 G 上の測度 dg であって, 任意の $a \in G$ と G 上の (実数値または複素数値の) 可積分関数 f に対し

$$\int_G f(ag)\, dg \;=\; \int_G f(g)\, dg$$

が成立するものを G の **(左不変) Haar 測度**と呼ぶ. また Haar 測度による積分 $\int_G f(g)\,dg$ を G 上の不変積分と呼ぶ.

事実 4.2.1. 線形 Lie 群 G 上には Haar 測度が定数倍を除いて一意に存在する.

構造が簡単な線形 Lie 群の場合は Haar 測度を具体的に求めることができる.

例 4.2.2. 正実数の乗法群 $\mathbb{R}^+ := (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ は線形 Lie 群である. dx を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度として, $x^{-1}dx$ は $\mathbb{R}^+$ の Haar 測度である. 実際, 任意の $a \in \mathbb{R}^+$ について, $ax = y$ と変数変換すれば

$$\int_0^\infty f(ax)\frac{dx}{x} \;=\; \int_0^\infty f(y)\frac{dy}{y}.$$

例 4.2.3. 上三角行列の群 $T = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right] \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0,\ c > 0\}$ において変数変換

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{bmatrix}$$

を考える. Jacobian を $\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}$ で表すと

$$dx'dy'dz' \;=\; \frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}dxdydz \;=\; a^2c\,dxdydz \;=\; \frac{x'^2z}{x^2z}dxdydz$$

となるから (問題 4.2.2). 従って $(x^2z)^{-1}dxdydz$ は T の Haar 測度である. つまり

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \frac{f(x,y,z)}{x^2z}dxdydz \;=\; \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \frac{f(x',y',z')}{x'^2z'}dx'dy'dz'.$$

例 4.2.4. 実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の Haar 測度は, $g = [g_{jk}]_{j,k=1}^n \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ と成分を書いたときに

$$dg \;=\; (\det g)^{-n}\prod_{j,k=1}^n dg_{jk}$$

で与えられる. 証明は問題 4.2.1 とする.

次に SU(2) の Haar 測度を求めてみよう. まず SU(2) の構造に関して次の補題を準備する (証明は問題 4.2.3).

補題 4.2.5. 二次特殊ユニタリ群 SU(2) に関して

$$\mathrm{SU}(2) \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} x+iy & -z+iw \\ z+iw & x-iy \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z,w \in \mathbb{R},\ x^2+y^2+z^2+w^2=1 \right\}.$$

特に SU(2) と $S^3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$ は一対一に対応する.

$a \in \mathrm{SU}(2)$ の乗法が定める写像 $T_a : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$, $g \mapsto g' = ag$ を考える．補題 4.2.5 の一対一対応で $g \leftrightarrow (x, y, z, w)$, $g' \leftrightarrow (x', y', z', w')$ となっているとして, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2$ だから, T_a は $\mathbb{R}^4$ の直交変換である．また $a \mapsto T_a$ は SU(2) の四次元の実表現を定めているが, SU(2) は連結だから (補題 2.2.9), $\det T_a = 1$ である (命題 2.2.10 の証明を参照)．以上より T_a は四次元の回転, つまり $T_a \in \mathrm{SO}(4)$ と見なせることが分かる．すると S^3 の体積要素 (体積を与える測度) は T_a で不変なので, $\mathrm{SU}(2) = S^3$ の Haar 測度を与えることが分かる．

そこで S^3 の極座標を用いて面積要素を求めよう．$(x, y, z, w) \in S^3$ を極座標で

$$\begin{aligned} &x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta\cos\phi, \quad z = \sin\theta\sin\phi\cos\omega, \quad w = \sin\theta\sin\phi\sin\omega \\ &(0 \le \theta, \phi \le \pi,\ 0 \le \omega \le 2\pi) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

と書くと $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 + \sin^2\theta \sin^2\phi\, d\omega^2$ となる．従って体積要素は

$$\sin^2\theta \sin\phi\, d\theta d\phi d\omega.$$

これが SU(2) の Haar 測度である．不変積分は次のようになる．

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\, dg = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \phi, \omega) \sin^2\theta \sin\phi\, d\theta d\phi d\omega$$

演習問題 (解答: 74 ページ)

問題 4.2.1. 例 4.2.4 を証明せよ．

問題 4.2.2. 例 4.2.3 で Jacobian が $\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = a^2 c$ となることを確かめよ．

問題 4.2.3. 補題 4.2.5 を証明せよ．

4.3 コンパクト群の不変積分と表現の指標

この副節では, 線形 Lie 群 G であって位相空間としてコンパクトなものを**コンパクト群**と呼ぶ. Euclid 空間のコンパクト集合の特徴付けから, コンパクト群とは線形 Lie 群 $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ であって $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の有界閉集合であるものに他ならない.

例 4.3.1. $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ はコンパクト群であるが, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ はコンパクト群ではない. 証明は問題 4.3.1 とする.

4.3.1 不変積分

コンパクト群 G は有界なので, Haar 測度 dg による 1 の積分 $\int_G dg$, つまり G の体積は有界である. 以下では G の体積が 1 になるよう dg を規格化したものを用いる. つまり

$$\int_G dg = 1.$$

不定積分の性質を次の補題にまとめておこう.

補題 4.3.2. コンパクト群 G 上の (実数値または複素数値) 連続関数 f に対し, その不変積分を

$$I(f) := \int_G f(g)\, dg$$

と表すと, 以下の主張が成立する.

(1) I は線形である.

(2) 任意の g に対して $f(g) \geq 0$ ならば, $I(f) \geq 0$.

(3) (2) で $I(f) = 0$ となるのは $f = 0$ の場合に限る.

(4) I は左不変である. つまり $g \in G$ に対し $(L_g f)(x) := f(g^{-1}x)$ とすると $I(L_g f) = I(f)$.

(5) $I(1) = 1$

(1)–(3) は Lebesgue 積分論で扱う内容であり, (4) と (5) は $I(f)$ の定義から直ちに従うので, 証明は略す. Haar 測度の一意性 (事実 4.2.1) を言い換えると次のようになる.

事実 4.3.3. コンパクト群 G に対し, 補題 4.3.2 の主張 (1)–(5) を満たす G 上の積分 I が一意に存在する.

この一意性の帰結を一つ紹介する.

命題 4.3.4. コンパクト群 G の不変積分 $I(f)$ は右不変である. つまり $g \in G$ に対し $(R_g f)(x) := f(xg)$ とすると $I(R_g f) = I(f)$.

証明. $a \in G$ を一つ取って, 新しい積分 $J(f)$ を

$$J(f) := \int_G f(ga)dg = I(R_a f)$$

で定義すると, これもまた補題 4.3.2 の (1)–(5) を満たす. 実際, (1)–(3) は積分の性質から従う. また (4) は, $a, b, x \in G$ に対して $(R_a L_b f)(x) = f(bxa) = (L_b R_g f)(x)$ だから,

$$J(L_b f) = I(R_g L_b f) = I(L_b R_g f) = I(R_g f) = J(f)$$

となって成立する．(5) は $L_b 1 = 1$ から従う．すると事実 4.3.3 の一意性から $J(f) = I(f)$ となる． □

コンパクト群 G の不変積分は, G の表現を研究するときに大変役に立つ．ユニタリ表現の定義 2.3.7 と, 任意のユニタリ表現は完全可約であること (命題 2.3.8) を思い出して欲しい．

命題 4.3.5. コンパクト群 G の任意の複素表現 (ρ, V) は適当なユニタリ内積に関してユニタリ表現になる．特に (ρ, V) は完全可約である．

証明. V のユニタリ内積 $\langle\,,\rangle$ を一つ取る (例えば V の基底 $(e_j)_{j\in J}$ を任意に取って $\langle e_j, e_k\rangle := \delta_{j,k}$ と定め, V 上には Hermite 型式になるように拡張すれば良い)．そして新たに

$$(v, w) := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \, dg$$

と定める．補題 4.3.2 より $(\,,\,)$ が V 上のユニタリ内積であることが確認できる．また命題 4.3.4 の右不変性から, 任意の $a \in G$ に対し

$$(\rho(a)v, \rho(a)w) = \int_G \langle \rho(ga)v, \rho(ga)w\rangle \, dg = \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \, dg = (v, w)$$

となる．よって (ρ, V) は $(\,,\,)$ に関してユニタリ表現になる． □

この命題から, コンパクト群の任意の表現はユニタリ行列で実現されるものと思える．その行列要素については次の**直交関係**が成立する．

定理 4.3.6. $\rho(g) = [\rho_{jk}(g)]_{j,k=1}^m$ と $\sigma(g) = [\sigma_{pq}]_{p,q=1}^n$ をコンパクト群 G のユニタリ行列による既約表現とすると

$$\int_G \overline{\rho_{jk}(g)}\sigma_{pq}(g)\, dg = \begin{cases} 0 & (\rho \not\simeq \sigma) \\ \frac{1}{n}\delta_{j,p}\delta_{k,q} & (\rho \simeq \sigma) \end{cases}.$$

証明. B をサイズ $m \times n$ 行列とし,

$$A := \int_G \rho(g) B \sigma(g)^{-1}\, dg \tag{4.3.1}$$

とする．任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)A = A\sigma(g)$ だから, 従って Schur の補題 1 (定理 2.3.11) より ρ と σ が同値でなければ $A = O$．特に $B = E_{kq}$ を (k, q) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列とすれば, その場合の (4.3.1) の (j, p) 成分から

$$0 = \int_G \overline{\rho_{jk}(g)}\sigma_{pq}(g)\, dg$$

が得られる．一方で $\rho \simeq \sigma$ なら Schur の補題 1 (定理 2.3.11) より $A = aI_n$, $a \in \mathbb{C}$ と書けて,

$$na = \mathrm{tr}(A) = \int_G \mathrm{tr}\big(\rho(g)B\rho(g^{-1})\big)\, dg = \int_G \mathrm{tr}(B)\, dg = \mathrm{tr}(B).$$

特に $B = E_{kq}$ とすれば $\mathrm{tr}(E_{kq}) = \delta_{k,q}$ より $a = \delta_{k,q}/n$．その場合の (4.3.1) の (j, p) 成分から

$$\frac{1}{n}\delta_{j,p}\delta_{k,q} = \int_G \overline{\rho_{jk}(g)}\sigma_{pq}(g)\, dg.$$

□

4.3.2 指標

ここで表現の重要な不変量である**指標**を導入する．有限次元線形空間 V 上の自己準同型 $f \in \mathrm{End}(V)$ のトレース $\mathrm{tr}_V\, f$ の定義を思い出しておくこと (問題 4.3.2).

定義 4.3.7. 群 G の有限次元表現 (ρ, V) の**指標**とは

$$\chi_\rho(g) := \mathrm{tr}_V\, \rho(g)$$

で定義される G 上の関数 χ_ρ のことである．

定義から直ちに次の主張が得られる．

補題 4.3.8. 群 G の有限次元表現 ρ と σ の指標に対して, 以下が成立する．

(1) $g, h \in G$ に対して $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$.

(2) $\rho \simeq \sigma$ ならば $\chi_\rho = \chi_\sigma$.

(3) 表現の直和 $\rho \oplus \sigma$ について, $\chi_{\rho\oplus\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$.

特に (2) は重要で, **二つの表現が同型か否かは指標を比較すれば分かる**．定義通りに考えると, 同型であることを示すには群準同型であって線形同型なものを構成することになるが, 指標が分かっていればその必要はない．また (3) から, もし考えている表現が完全可約なら, その指標は既約表現の指標の和で書けることになる．既約表現の指標は重要で, **既約指標**と呼ばれることが多い．

次に群の表現のテンソル積の定義 3.3.5 を思い出して欲しい．

補題 4.3.9. 群 G の有限次元表現 ρ と σ について, それらのテンソル積 $\rho \otimes \sigma$ の指標は $\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \chi_\sigma$.

証明. 任意の $g \in G$ に対して $\chi_{\rho\otimes\sigma}(g) = \chi_\rho(g)\chi_\sigma(g)$ となることを示せばよい．ρ の表現空間を V, σ の表現空間を W とすると, 表現のテンソル積の定義 3.3.5 から

$$\chi_{\rho\otimes\sigma}(g) = \mathrm{tr}_{V\otimes W}(\rho\otimes\sigma)(g) = \mathrm{tr}_{V\otimes W}(\rho(g)\otimes\sigma(g)) \overset{(*)}{=} \mathrm{tr}_V\, \rho(g)\cdot \mathrm{tr}_W\, \sigma(g) = \chi_\rho(g)\chi_\sigma(g).$$

但し $(*)$ では行列のテンソル積のトレースに関する補題 3.3.4 を用いた． □

コンパクト群 G 上の Haar 測度 dg に関する二乗可積分関数の空間 $L^2(G)$ には

$$(\varphi, \psi) := \int_G \overline{\varphi(g)}\psi(g)\, dg \tag{4.3.2}$$

でユニタリ内積が入る．

定理 4.3.10. ρ と σ をコンパクト群 G の有限次元連続表現とする．また $(\ ,\ )$ を (4.3.2) のユニタリ内積とする．

(1) ρ と σ が既約なら

$$(\chi_\rho, \chi_\sigma) = \begin{cases} 0 & (\rho \not\simeq \sigma) \\ 1 & (\rho \simeq \sigma) \end{cases}.$$

(2) ρ が既約であるための必要十分条件は $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

(3) $\rho \simeq \sigma$ であるための必要十分条件は $\chi_\rho = \chi_\sigma$.

証明. (1) 命題 4.3.5 より ρ と σ はユニタリ行列 $\rho(g)=[\rho_{jk}(g)]_{j,k=1}^m$, $\sigma(g)=[\sigma_{pq}(g)]_{p,q=1}^n$ による表現だとしてよい．すると直交関係 (定理 4.3.6) から

$$(\chi_\rho,\chi_\sigma) = \int_G \overline{\operatorname{tr}\rho(g)}\operatorname{tr}\sigma(g)\,dg = \int_G \sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^n \overline{\rho_{jj}(g)}\sigma_{pp}(g)\,dg = \begin{cases}0 & (\rho\not\simeq\sigma)\\ \sum_{j,p=1}^n \frac{1}{n}\delta_{jp}=1 & (\rho\simeq\sigma)\end{cases}.$$

(2) ρ が既約であれば (1) から $(\chi_\rho,\chi_\rho)=1$．逆に ρ が $(\chi_\rho,\chi_\rho)=1$ を満たすと仮定する．命題 4.3.5 より ρ は完全可約だから，有限個の有限次元既約表現の直和に分解できる．この既約分解を

$$\rho\simeq\rho_1^{\oplus m_1}\oplus\cdots\oplus\rho_l^{\oplus m_l},\quad \rho_j\neq\rho_k\ (1\le j\neq k\le l)$$

と表すと，補題 4.3.8 (3) より

$$\chi_\rho=\sum_{j=1}^l m_j\chi_j,\quad \chi_j:=\chi_{\rho_j}. \tag{4.3.3}$$

すると (1) から

$$(\chi_\rho,\chi_j) = m_j,\quad (\chi_\rho,\chi_\rho) = \sum_{j=1}^l m_j^2 \tag{4.3.4}$$

が従う．よって $(\chi_\rho,\chi_\rho)=1 \iff \exists j,\ \rho\simeq\rho_j$ である．

(3) $\rho\simeq\sigma$ ならば $\chi_\rho=\chi_\sigma$ は補題 4.3.8 (2) である．逆に $\chi_\rho=\chi_\sigma$ ならば任意の既約表現 ρ_j に対して $m_j:=(\chi_\rho,\chi_{\rho_j})=(\chi_\sigma,\chi_{\rho_j})$ だから，(4.3.3) と (4.3.4) の前半から $\rho\simeq\bigoplus_{j=1}^l\rho_j^{\oplus m_j}\simeq\sigma$．

□

4.3.3 SU(2) の既約指標

命題 4.1.3 ないし (4.1.6) の SU(2) の $m+1$ 次元既約表現 ρ_m

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\longmapsto\rho_m(A),\quad (\rho_m(A)f)(x)=(bx+d)^m f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)\quad (f: m\text{ 次以下の多項式})$$

について，その指標を具体的に計算してみよう．簡単のため指標を次のように表す．

$$\chi_m(g) := \chi_{\rho_m}(g) = \operatorname{tr}_{V_m}\rho_m(g)\quad (g\in \mathrm{SU}(2)).$$

SU(2) の部分群

$$H := \left\{\begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}$$

を考えよう．任意の $g\in\mathrm{SU}(2)$ は H の元と共役である (レポート問題 4 (1))．$g=khk^{-1}$, $k\in\mathrm{SU}(2)$, $h\in H$ と書くと，指標の性質から $\chi_m(g)=\chi_m(khk^{-1})=\chi_m(h)$ なので (補題 4.3.8 (1))，指標は H での値で定まることが分かる．

そこで指標 χ_m の H における値を計算しよう．結果は以下の通り．

定理 4.3.11. SU(2) の $m+1$ 次元既約表現 ρ_m の指標 χ_m の部分群 H への制限は，θ の関数として次のように書ける．

$$\chi_m(h) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}.$$

この定理の証明の詳細を補うのをレポート問題 4 とする.

証明. 補題 4.2.5 の全単射

$$\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sim} S^3, \quad \begin{bmatrix} x+iy & -z+iw \\ z+iw & x-iy \end{bmatrix} \longmapsto (x,y,z,w)$$

と S^3 の極座標 (4.2.1)

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta\cos\phi, \quad z = \sin\theta\sin\phi\cos\omega, \quad w = \sin\theta\sin\phi\sin\omega$$

による対応 $\mathrm{SU}(2) \ni g \mapsto (\theta,\phi,\omega)$ で $h = \left[\begin{smallmatrix} \exp(i\theta) & \\ & \exp(-i\theta) \end{smallmatrix}\right] \in H$ の行先を計算すると

$$h \longmapsto (\theta, 0, 0).$$

よって $\chi_m|_H$ は θ の関数として表せるはずである. 実際, 表現空間 V_m の基底 $f_k = x^k$ $(k=0,\ldots,m)$ について $h = \left[\begin{smallmatrix} a & \\ & 1/a \end{smallmatrix}\right]$, $a := \exp(i\theta)$ の表現行列を計算すると

$$\rho_m(h) f_k = a^{2k-m} f_k \tag{4.3.5}$$

となる (レポート問題 4 (2)). トレースを取ると

$$\chi_m(h) = \frac{a^{m+1} - a^{-m-1}}{a - a^{-1}} = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \tag{4.3.6}$$

となり (レポート問題 4 (3)), 確かに指標 χ_m が θ の関数として書き表せた. □

演習問題 (解答: 74 ページ)

問題 4.3.1. 例 4.3.1 を証明せよ.

問題 4.3.2. 有限次元線形空間 V 上の自己準同型 $f \in \mathrm{End}(V)$ のトレース $\mathrm{tr}_V f$ の定義を説明せよ.

4.4 テンソル積表現の既約分解 (Clebsch-Gordan 則)

§3.3.2 で群の表現のテンソル積を扱ったが, ここでは SU(2) または SO(3) の有限次元既約連続表現のテンソル積を考えよう. それはやはり有限次元の連続表現だから完全可約で, 既約分解を考えることができる.

定理 4.4.1 (SU(2) の Clebsch-Gordan 則)**.** SU(2) の有限次元既約連続表現 ρ_m と ρ_n について, そのテンソル積 $\rho_m \otimes \rho_n$ の既約分解は次で与えられる.

$$\rho_m \otimes \rho_n \ \simeq\ \rho_{m+n} \oplus \rho_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus \rho_{|m-n|}.$$

証明. §4.3.3 と同様に ρ_m の指標を χ_m と書く. またテンソル積 $\rho_m \otimes \rho_n$ の指標を $\chi_{m,n} := \chi_{\rho_m \otimes \rho_n}$ と書こう. 補題 4.3.8 (2) より指標の等式

$$\chi_{m,n} \ =\ \chi_{m+n} + \chi_{m+n-2} + \cdots + \chi_{|m-n|}$$

を示せばよい. 補題 4.3.9 より表現のテンソル積の指標は指標の積だから $\chi_{m,n} = \chi_m \chi_n$. 定理 4.3.11 より部分群 $H = \{h = \mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid |a| = 1\} \subset \mathrm{SU}(2)$ 上では

$$\chi_m(h) \ =\ \frac{a^{m+1} - a^{-m-1}}{a - a^{-1}} \ =\ a^m + a^{m-2} + \cdots + a^{-m+2} + a^{-m}$$

と書ける. $m \geq n$ として計算すると

$$\begin{aligned}
\chi_{m,n}(h) \ &=\ \chi_m(h)\chi_n(h) \ =\ \frac{a^{m+1} - a^{-m-1}}{a - a^{-1}}(a^n + a^{n-2} + \cdots + a^{-n}) \\
&=\ \frac{1}{a - a^{-1}}\big((a^{m+n+1} - a^{-m-n+1}) + (a^{m+n-1} - a^{-m-n+1}) + \cdots + (a^{m-n+1} - a^{-m+n-1})\big) \\
&=\ (\chi_{m+n} + \chi_{m+n-2} + \cdots + \chi_{m-n})(h).
\end{aligned}$$

$n \geq m$ の時も同様に計算できて $\chi_{m,n}(h) = (\chi_{n+m} + \chi_{n+m-2} + \cdots + \chi_{n-m})(h)$ となる. 以上より示せた. □

SU(2) の既約表現 ρ_m と SO(3) の既約表現 $\tau_{m/2}$ の対応を用いて, 定理 4.4.1 から SO(3) に関する Clebsch-Gordan 則も得られる. 結果だけ書くと

定理 4.4.2 (SO(3) の Clebsch-Gordan 則)**.** SO(3) の有限次元既約連続表現 τ_m と τ_n について, そのテンソル積 $\tau_m \otimes \tau_n$ の既約分解は次で与えられる.

$$\tau_m \otimes \tau_n \ \simeq\ \tau_{m+n} \oplus \tau_{m+n-1} \oplus \cdots \oplus \tau_{|m-n|}.$$

4.5 レポート問題

レポート問題 4 (解答: 78 ページ)**.** 定理 4.3.11 の証明の詳細を補え. つまり

(1) 任意の $g \in G = \mathrm{SU}(2)$ に対し, ある $k \in G$ と $h \in H$ が存在して $g = khk^{-1}$ となることを示せ.

(2) (4.3.5) を確かめよ.

(3) (4.3.6) を確かめよ.

5　球面調和関数 (12/14)

今回の内容は参考書 [山杉, V 章] に基づく.

5.1　球関数

群作用の定義を復習しよう. 集合 S から自分自身への全単射のなす群を $\mathrm{Aut}(S)$ と書く.

定義 5.1.1. **群 G の集合 S への作用**とは群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(S)$ のことである.

言い換えると, 写像 $G \times S \to S$, $(g, s) \mapsto g.s$ であって以下の条件を満たすものを G の S への作用と呼ぶ.

(1) 任意の $g, h \in G$ と $s \in S$ に対して $(gh).s = g.(h.s)$.

(2) 単位元 $e \in G$ と任意の $s \in S$ に対して $e.s = s$.

また G が S に作用することを $G \curvearrowright S$ で表す.

この二つの定義が同値であることの証明は問題 5.1.1 とする.

定義 5.1.2. 群 G の集合 S への作用が**推移的** (transitive) であるとは, 任意の二元 $s, t \in S$ に対してある $g \in G$ が存在して $g.s = t$ となることをいう.

例 5.1.3. 三次回転群 $\mathrm{SO}(3)$ と, 三次元 Euclid 空間 E^3 の中の二次元球面 $S^2 = \{v = {}^T(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える. 写像

$$\mathrm{SO}(3) \times S^2 \longrightarrow S^2, \quad (g, v) \longmapsto g.v := gv \ (\text{行列の積})$$

によって, $\mathrm{SO}(3)$ は S^2 に推移的に作用する (証明は問題 5.1.2).

群 G とその部分群 H に対し, G/H で (左) 剰余類 $gH := \{gh \mid h \in H\}$ $(g \in G)$ の集合を表す.

命題 5.1.4. 群 G が集合 S に推移的に作用するとき, 元 $s_0 \in S$ を任意に取って

$$H := \{g \in G \mid g.s_0 = s_0\}$$

と定めると, H は G の部分群であり, 更に次のような全単射が存在する.

$$S \xrightarrow{\sim} G/H, \quad s_0 \longmapsto eH.$$

証明. H が部分群であることは明らか.

次に写像 $\iota : S \to G/H$ で $\iota(s_0) = eH$ となるものを構成する. 作用が遷移的なので, 任意の $s \in S$ に対してある $g \in G$ が存在して $g.s_0 = s$ となる. この g を用いて $\iota(s) := gH$ と定める. ι が well-defined であることを示したいが, もし $g.s_0 = g'.s_0 = s$ ならば, $g^{-1}.s = s_0$ より $g^{-1}g'.s_0 = g^{-1}.(g'.s_0) = g^{-1}.s = s_0$ となって $g^{-1}g' \in H$ が言えるから, $gH = g'H$, つまり ι が well-defined であることが示せた. 定め方から $\iota(s_0) = eH$ となる.

あとは ι の逆写像を見つければ良いが, それは $gH \mapsto g.s_0$ である. この写像が well-defined であることは, $gH = g'H$ ならば $g^{-1}g' \in H$, つまり $g.s_0 = g'.s_0$ となることから分かる. ι の逆写像であることは簡単に確認できる. □

定義 5.1.5. 命題 5.1.4 の部分群 $H \subset G$ を s_0 の**固定部分群**, **安定化部分群** (stabilizer subgroup) または**等方部分群** (isotropy subgroup) と呼ぶ.

例 5.1.6 (証明は問題 5.1.3)**.** 例 5.1.3 の作用 $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright S^2$ において, ${}^{T}(0,0,1) \in S^2$ の固定部分群 H は

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathrm{SO}(2).$$

従って命題 5.1.4 より $\mathrm{SO}(3)/H = S^2$.

さて, 線形 Lie 群 G が位相空間 S に連続に作用しているとしよう. ここで**連続な作用**とは, 写像 $(g,s) \mapsto g.s$ が連続であることとする. 例 5.1.3 の作用 $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright S^2$ がそのような状況である. S 上の複素数値連続関数全体のなす集合を $C(S)$ と書く. $C(S)$ は (一般には) **無限次元**の複素線形空間である.

補題 5.1.7. 線形 Lie 群 G が位相空間 S に推移的かつ連続に作用しているとする. $f \in C(S)$ と $g \in G$ に対し $T_g f \in C(S)$ を

$$(T_g f)(s) := f(g^{-1}.s)$$

で定義すると, 次の写像 T で表現空間を $C(S)$ とする G の表現 $(T, C(S))$ が定まる.

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}(C(S)), \quad g \longmapsto T_g.$$

証明. まず作用 $G \curvearrowright S$ の連続性から確かに $T_g f \in C(S)$ であることを注意しておく.

$g \mapsto T_g$ が G の表現であることを示そう. 任意の $s \in S$ に対し $e.s = s$ なので $T_e = \mathrm{id}_{C(S)}$. また任意の $g,h \in G$ に対して

$$(T_{gh}f)(s) = f\big((gh)^{-1}.s\big) = f\big(h^{-1}.(g^{-1}.s)\big) = (T_h f)(g^{-1}.s) = (T_g T_h f)(s)$$

より $T_{gh} = T_g T_h$. □

この関数空間 $C(S)$ 上の G の表現が連続表現である状況を考えたい. そのためには $C(S)$ での連続性, つまり「二つの関数が十分近い」ことを表す概念が必要になる. そこで次の事実を引用する. §4.3 に引き続き, コンパクトな線形 Lie 群のことをコンパクト群と呼ぶ.

事実 5.1.8. コンパクト群 G が Hausdorff 空間 S に推移的かつ連続に作用しているとする. この時 S には **G 不変な積分**が存在する. つまり S 上のある測度 ds が存在して, それに関する S 上の可積分関数 f と任意の $g \in G$ に対して

$$\int_S f(s)\, ds = \int_S f(g.s)\, ds.$$

更にこのような ds は定数倍を除いて一意に定まる.

これは G に Haar 測度が一意に存在すること (事実 4.2.1, 事実 4.3.3) の帰結である. 実際, G の Haar 測度を使って $\int_S f(s)\, ds := \int_G f(gH)\, dg$ と定義すれば良い.

例 5.1.9. 再び 5.1.3 の作用 $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright S^2$ を考える. $\mathrm{SO}(3)$ はコンパクトであり, S^2 は Hausdorff 空間なので, 事実 5.1.8 が適用できる. この場合の不変積分は, 極座標による積分

$$\int_{S^2} f(s)\, ds := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

に他ならない．実際, $g \in \mathrm{SO}(3)$ で動かしても $\int_{S^2} f(s)\,ds = \int_{S^2} f(g.s)\,ds$ である．

S 上の G 不変積分 $\int_S ds$ に関して二乗可積分な複素数値関数のなす空間を

$$L^2(S) := \{f : S \to \mathbb{C} \mid \int_S |f(s)|^2\,ds < \infty\}$$

で表す．$L^2(S)$ にはユニタリ内積 $(\ ,\ )$ を

$$(f_1, f_2) := \int_S \overline{f_1(s)} f_2(s)\,ds \tag{5.1.1}$$

で定めることができる．特に $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$ でノルムが入る．

この状況で補題 5.1.7 を強めることができる．ユニタリ表現の定義 2.3.7 を思い出して欲しい．

補題 5.1.10. コンパクト群 G が Hausdorff 空間 S に推移的かつ連続に作用しているとする．$f \in L^2(S)$ と $g \in G$ に対し $T_g f \in L^2(S)$ を

$$(T_g f)(s) := f(g^{-1}.s)$$

で定義できて, $T : G \to \mathrm{GL}(L^2(S))$, $g \mapsto T_g$ は G の表現 $(T, L^2(S))$ を定める．この表現は, $g_n \to g$ ならば任意の $f \in L^2(S)$ に対して $\|T_{g_n} f - T_g f\| \to 0$ となる, という意味で連続であり, 更にユニタリ型式 (5.1.1) に関するユニタリ表現である．そして補題 5.1.7 の表現 $C(S)$ は $L^2(S)$ の不変部分空間である．

証明. $\int_S ds$ が不変測度であることから $\|T_g f\| = \|f\|$ であり, 従って $T_g f \in L^2(S)$．$g \mapsto T_g$ が群準同型であることは補題 5.1.7 と同じ議論で示せる．S 上の連続関数は二乗可積分なので, $C(S)$ は $L^2(S)$ の不変部分空間である．□

線形 Lie 群の関数による表現の準備を終えたところで, この講義の主題である球関数の概念を導入する．

定義 5.1.11. コンパクト群 G が Hausdorff 空間 S に推移的かつ連続に作用しているとする．$C(S)$ の有限次元既約不変部分空間 V の元を S 上の**球関数**と呼ぶ．

つまり球関数とは G の有限次元既約表現 (ρ, V) を S 上の連続関数で実現したもののことである．

次の副節で例 5.1.3 の $G = \mathrm{SO}(3) \curvearrowright S = S^2$ の場合の球関数を詳しく扱う．その際に必要になる事実を紹介しておく．ユニタリ表現は完全可約なので (命題 2.3.8), 表現 $(T, C(S))$ は完全可約であり, 従って既約表現 V の $C(S)$ における重複度 (定義 2.3.9) に意味があることを注意しておく．

事実 5.1.12 (Cartan の相互律, [山杉, V §1 [X]])**.** コンパクト群 G が Hausdorff 空間 $S = G/H$ に推移的かつ連続に作用しているとする．G の既約表現 (ρ, V) の $(T, C(S))$ における重複度は, 固定部分群 H の表現 $(\rho|_H, V)$ における自明表現の重複度に等しい．

演習問題 (解答: 75 ページ)

問題 5.1.1. 群作用の二つの定義 5.1.1 が同値であることを示せ．

問題 5.1.2. 例 5.1.3 を示せ．

問題 5.1.3. 例 5.1.6 を示せ．

5.2 球面調和関数

§1.3 で三次元の Laplace 作用素の固有関数として球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ を導入した (定理 1.3.1). この副節では球面調和関数が定義 5.1.11 の意味での球関数であることを説明する. [山杉, V §2] も参照されたい.

5.2.1 SO(3) の表現

定理 4.1.5 で SO(3) の有限次元既約連続表現を分類したが, 記号の復習も兼ねてもう一度整理しておこう.

まず三次回転群 $\mathrm{SO}(3)=\{A\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})\mid {}^T\!AA=I_3\}$ と二次特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(2)=\{g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\mid g^*g=I_2\}$ の関係を思い出そう. SU(2) の随伴表現 $\mathrm{Ad}:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$, $(\mathrm{Ad}\,g)(X)=gXg^{-1}$ は, $\mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))\simeq\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ によって連続な全射群準同型

$$\mathrm{Ad}:\mathrm{SU}(2)\twoheadrightarrow\mathrm{SO}(3)$$

を定めるのだった (定理 2.2.2, 命題 2.2.13). これから付随する Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ にも関係があることが期待できる. 命題 2.2.4 と補題 3.1.4 より

$$\mathfrak{su}(2)=\{X\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})\mid X^*+X=0\},\quad \mathfrak{so}(3)=\mathfrak{o}(3)=\{X\in\mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})\mid {}^T\!X+X=O\}$$

で, どちらも三次元の実線形空間であることに注意しよう.

補題 5.2.1. Ad の微分表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{su}(2)\to\mathrm{End}(\mathfrak{su}(2))$ (定義 3.2.7) は次の実 Lie 環としての同型を定める.

$$\mathrm{ad}:\mathfrak{su}(2)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{so}(3).$$

証明. 補題 2.2.11 の $\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$e_1:=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix},\quad e_2:=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\quad e_3:=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}.$$

に関して ad を計算しよう. 補題 3.2.8 より $(\mathrm{ad}\,X)(Y)=[X,Y]=XY-YX$ だから, (4.1.2) の計算が使えて,

$$(\mathrm{ad}\,e_1)(e_2)=e_3,\quad (\mathrm{ad}\,e_2)(e_3)=e_1,\quad (\mathrm{ad}\,e_3)(e_1)=e_2.$$

その他の値は $[X,Y]=-[Y,X]$ から計算できて, 例えば $(\mathrm{ad}\,e_1)(e_1)=0$, $(\mathrm{ad}\,e_1)(e_3)=-(\mathrm{ad}\,e_3)(e_1)=-e_2$ となる. よって基底 (e_1,e_2,e_3) に関する $\mathrm{ad}\,e_j$ の表現行列は以下の A_j になる.

$$A_1:=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad A_2:=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad A_3:=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$A_j\in\mathfrak{so}(3)$ と (A_1,A_2,A_3) が $\mathfrak{so}(3)$ の基底であることは明らか. また $(j,k,l)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ に対して $[A_j,A_k]=A_l$ となることが簡単に確認できる. 従って $\mathrm{ad}:e_j\mapsto A_j$ が実 Lie 環の同型 $\mathfrak{su}(2)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{so}(3)$ を与えることが示された. □

従って Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現の分類定理 4.1.10 は $\mathfrak{so}(3)$ の有限次元既約表現の分類でもある. 定義 4.1.11 の記号を使うと, $\lambda\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathfrak{so}(3)$ の $\lambda+1$ 次元既約表現 L_λ が一意に定まる.

ここで線形 Lie 群 SO(3) の有限次元既約連続表現の分類定理 4.1.5 を思い出すと, SO(3) の既約表現 τ_l ($l \in \mathbb{N}$) は SU(2) の既約表現 ρ_{2l} と対応する. ρ_{2l} の微分表現は L_{2l} だから, SO(3) の既約表現の微分表現として得られる $\mathfrak{so}(3)$ の表現は L_{2l} だと分かる.

ここで $\mathfrak{su}(2)$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプル E, F, H を思い出すと (定義 4.1.6), 補題 5.2.1 の同型 $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$, $e_j \mapsto A_j$ でそれらは

$$E = -iA_1 - A_2, \quad F = -iA_1 + A_2, \quad H = -2iA_3 \tag{5.2.1}$$

と対応する. この $\mathfrak{so}(3)$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプルを用いて, SO(3) の有限次元既約連続表現 τ_l 及びその微分表現を特徴づけておこう.

定義 5.2.2. $l \in \mathbb{N}$ に対し, SO(3) の $2l+1$ 次元有限次元既約連続表現 τ_l の微分表現を $(d\tau_l, L_{2l})$ と書く. 表現空間 L_{2l} は基底 $(y_{l,l}, y_{l,l-1}, \ldots, y_{l,-l})$ を持ち, それらは $\mathfrak{sl}_2$ トリプル (5.2.1) に対して次のように振舞う.

$$\begin{aligned}
(d\tau_l)(E)y_{l,m} &= a_{l,m}y_{l,m+1}, \quad a_{l,m} := l(l+1) - m(m+1),\\
(d\tau_l)(F)y_{l,m} &= y_{l,m-1},\\
(d\tau_l)(H)y_{l,m} &= 2my_{l,m}.
\end{aligned}$$

但し $y_{l,l+1} = y_{l,-l-1} := 0$ とした.

記号 (l,m) は定理 4.1.10 の記号 (λ,μ) と $(\lambda,\mu) = (2l, 2m)$ で対応していることに注意して欲しい.

5.2.2　球関数による SO(3) の表現

前副節の議論を $G = \mathrm{SO}(3) \curvearrowright S = S^2$ に適用してみよう. 例 5.1.3 より ${}^T(0,0,1) \in S^2$ の固定部分群 H は SO(2) と同型で, また $S^2 = \mathrm{SO}(3)/H$ であった. 表現 $(T, C(S^2))$ はユニタリ表現なので完全可約であり, 従って既約連続表現の直和に分解できることも思い出して欲しい. すると事実 5.1.12 から次の主張が得られる.

命題 5.2.3. SO(3) の任意の有限次元既約連続表現は表現 $(T, C(S^2))$ の既約分解に一回ずつ現れる.

証明. (τ, V) を SO(3) の有限次元既約連続表現とする. 分類定理 4.1.5 より τ は最高ウェイト l の既約表現だと仮定できる. すると

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in H \subset \mathrm{SO}(3)$$

について, $V = V_l$ の適当な基底をとれば, その表現行列は対角行列

$$\mathrm{diag}\bigl(e^{lt}, e^{(l-2)t}, \ldots, e^{-lt}\bigr)$$

になる. よって $V^0 := \{v \in V \mid \rho(h)v = v, \ \forall h \in H\}$ は一次元である. よって事実 5.1.12 より (τ, V) の $C(S^2)$ における重複度は 1 である. □

この命題から SO(3) の任意の有限次元既約連続表現 τ_l は S^2 上の球関数で実現できることが分かった. 以下ではその球関数を具体的に求めてみよう.

$g \in \mathrm{SO}(3)$ に対して表現 $(T, C(S^2))$ は $(T_g f)(s) = f(g^{-1}.s)$ で与えられた. その微分表現 $dT : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{End}(C(S^2))$ を考えよう. 補題 5.2.1 の証明で構成した $\mathfrak{so}(3)$ の基底

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.2.2}$$

を思い出す．また $S^2 = \{{}^T(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ の極座標を次のように表す．

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi).$$

すると $(dT)(A_j) : C(S^2) \to C(S^2)$ は (θ,ϕ) の関数 f を $(dT)(A_j)f$ に写す線形作用素とみなせる．

補題 5.2.4. 微分表現 dT によって $A_j \in \mathfrak{so}(3)$ は以下の微分作用素に写る．

$$(dT)(A_1) = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad (dT)(A_2) = -\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad (dT)(A_3) = -\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

証明. まず $(dT)(A_3)$ を計算する．$g = \exp(tA_3) \in \mathrm{SO}(3)$ を考えると，$s = {}^T(x,y,z) \in S^2$ は

$$g^{-1}.s = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & \\ -\sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos(\phi-t) \\ \sin\theta\sin(\phi-t) \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

に写る．$f(s) \in C(S^2)$ に対し $f_t(s) := (T_{\exp(tA_3)}f)(s) = f(\exp(-tA_3).s)$ とすると，s の代わりに極座標 (θ,ϕ) で書くと，上の計算から $f_t(\theta,\phi) = f(\theta,\phi-t)$ となる．従って

$$(dT)(A_3)f = \lim_{t\to 0}\frac{T_g f - f}{t} = \left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial\phi}.$$

次に $(dT)(A_1)$ を同様の手順で計算する．$g = \exp(tA_1) \in \mathrm{SO}(3)$ と $s = {}^T(x,y,z) \in S^2$ に対して

$$g^{-1}.s = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos t & \sin t \\ & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi\cos t + \cos\theta\sin t \\ -\sin\theta\sin\phi\sin t + \cos\theta\cos t \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

よって $f(s) = f(x,y,z) = f(\theta,\phi) \in C(S^2)$ に対して

$$\big((dT)(A_1)f\big)(s) = \lim_{t\to 0}\frac{(T_g f)(s) - f(s)}{t} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} - \sin\theta\sin\phi\frac{\partial f}{\partial z}.$$

ところで直交座標と極座標の間の微分の変換公式 (レポート問題 5) より

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

なので，

$$(dT)(A_1) = \cos\theta\Big(\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) - \sin\theta\sin\phi\Big(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

$(dT)(A_2)$ の計算も同様で，$g = \exp(tA_2) \in \mathrm{SO}(3)$ と $s = {}^T(x,y,z) \in S^2$ に対して

$$g^{-1}.s = \begin{bmatrix} \cos t & & -\sin t \\ & 1 & \\ \sin t & & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi\cos t - \cos\theta\sin t \\ \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi\sin t + \cos\theta\cos t \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}.$$

よって $f(s) = f(x,y,z) = f(\theta,\phi) \in C(S^2)$ に対して

$$\big((dT)(A_2)f\big)(s) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x''}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y''}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z''}{\partial t}\right|_{t=0} = -\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial z}.$$

再びレポート問題 5 から

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

となるなので,

$$(dT)(A_2) = -\cos\theta\Big(\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) + \sin\theta\cos\phi\Big(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = -\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

□

注意 5.2.5. $\mathfrak{so}(3)$ の基底 (A_1, A_2, A_3) は交換子について $[A_1, A_2] = A_3$ 等を満たすが, dT は Lie 環の表現だから, $(dT)(A_j) \in \mathrm{End}(C(S^2))$ 達も同じ関係式を満たす．つまり, 線形写像 $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(C(S^2))$ に対して

$$[\varphi, \psi] := \varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi$$

とすれば, $[(dT)(A_1), (dT)(A_2)] = (dT)(A_3)$ 等が成立する (問題 5.2.1)

補題 5.2.4 の計算から, $\mathfrak{so}(3)$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプル (5.2.1)

$$E = -iA_1 - A_2, \quad F = -iA_1 + A_2, \quad H = -2iA_3$$

が微分表現 dT で以下の微分作用素に対応することが分かる．

$$dT(E) = e^{-i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big), \quad dT(F) = -e^{i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big), \quad dT(H) = 2i\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

ここで定義 5.2.2 の既約表現 $(d\tau_l, L_{2l})$ $(l \in \mathbb{N})$ を思い出そう．命題 5.2.3 より $d\tau_l$ は dT の部分表現と思えるので, 定義 5.2.2 の $(d\tau_l)(X)$ $(X = E, F, H)$ を $(dT)(X)$ に置き換えて良い．従って表現空間 $L_{2l} \subset C(S^2)$ の基底 $(y_{l,m})_{m=l,l-1,\dots,-l}$, つまり S^2 上の球関数 $y_{l,m}(\theta, \phi)$ は次の微分方程式系を満たす．

$$(dT)(E)y_{l,m} = a_{l,m}y_{l,m+1}, \quad (dT)(F)y_{l,m} = y_{l,m-1}, \quad (dT)(H)y_{l,m} = 2my_{l,m}.$$

この微分方程式系から $y_{l,m}(\theta, \phi)$ 達を決定することができる．

定理 5.2.6. $L_{2l} \subset C(S^2)$ の基底 $\big(y_{l,m}(\theta, \phi)\big)_{m=l,l-1,\dots,-l}$ は共通の定数倍を除いて以下で与えられる．

$$y_{l,m}(\theta, \phi) = e^{-im\phi}P_l^{-m}(\cos\theta), \quad P_l^m(x) := \frac{1}{2^l l!}(1 - x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2 - 1)^l.$$

証明. $(dT)(H)y_{l,m} = 2my_{l,m}$ から $i\frac{\partial}{\partial\phi}y_{l,m} = my_{l,m}$ となるので, $y_{l,m}(\theta, \phi) = e^{-im\phi}f_{l,m}(\theta)$ と書ける．従って $f_{l,m}$ $(|m| \le l)$ を決定すればよい．

まず $m = l$ の場合, $(dT)(E)y_{l,l} = 0$ より $\frac{d}{d\theta}f_{l,l} - l\cot\theta f_{l,l} = 0$. これは変数分離型の微分方程式なので簡単に積分できて

$$f_{l,l}(\theta) = C\sin^l\theta \quad (C \text{ は定数}).$$

一般の m に対しては, $(dT)(F)y_{l,m} = y_{l,m-1}$ から

$$-\frac{d}{d\theta}f_{l,m}(\theta) - m\cot\theta f_{l,m}(\theta) = f_{l,m-1}(\theta)$$

となる．θ から $x = \cos\theta$ に変数変換して $p_{l,m}(x) := f_{l,m}(\cos\theta)$ と書くと, この方程式は

$$(1 - x^2)\frac{d}{dx}p_{l,m}(x) - mxp_{l,m}(x) = \sqrt{1 - x^2}\,p_{l,m-1}(x)$$

に書き直せる．$p_{l,m}(x) = (1-x^2)^{-m/2}u_m(x)$ とおいて更に書き直すと

$$\frac{du_m}{dx} = u_{m-1}$$

になる．$u_l(x) = C\sin^{2l}\theta = C(1-x^2)^l$ より

$$u_m(x) = \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}u_l(x) = C\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l, \quad p_{l,m}(x) = C(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l$$

となって，$C := 1/(2^l l!)$ とすれば結論が得られる．なお，以上の議論で使っていない等式 $(dT)(E)y_{l,m} = a_{l,m}y_{l,m+1}$ は F と H の関係式から自動的に成立する (注意 5.2.5). □

この副節の残りの部分で，$Y_{l,m}(\theta,\phi) = y_{l,-m}(\theta,\phi)$ と $P_l^m(x)$ が定理 1.3.1 の球面調和関数と Legendre 陪関数に一致することを示す (結論は系 5.2.10)．まず Laplace 作用素 Δ の Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ による解釈を説明する．

定理 5.2.7. SO(3) の任意の連続表現 (τ, V) について，

$$\Lambda_\tau := (d\tau)(A_1)^2 + (d\tau)(A_2)^2 + (d\tau)(A_3)^2 \in \mathrm{End}(V)$$

とおく．但し (A_1, A_2, A_3) は Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ の基底 (5.2.2).

(1) Λ_τ は任意の $\tau(g)$ $(g \in \mathrm{SO}(3))$ と可換，つまり $[\Lambda_\tau, \tau(g)] = 0$ である．

(2) τ が既約表現なら Λ_τ はスカラー倍写像である．

(3) $2l+1$ 次元既約表現 (τ_l, V_{2l}) の場合，任意の $v \in V_{2l}$ に対して $\Lambda_{\tau_l}v = -l(l+1)v$.

(4) 表現 (τ, V) が S^2 上の球関数で実現されている場合，つまり $V \subset C(S^2)$ の時，Λ_τ は τ によらずに $C(S^2)$ 上の次の微分作用素 Λ で与えられる．

$$\Lambda_\tau = \Lambda := \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

この微分作用素 Λ は**三次元 Laplace 作用素の極座標表示** (1.3.1) **に現れたもの**に他ならない．

証明. (1) 任意の $X \in \mathfrak{so}(3)$ に対して $d\tau(X)$ と Λ_τ が可換であることを示せば十分．実際，$d\tau(X)$ と Λ_τ が可換なら，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $[(d\tau(X))^n, \Lambda_\tau] = 0$. すると $a := \exp(tX) \in \mathrm{SO}(3)$ $(t \in \mathbb{R})$ について

$$[\Lambda_\tau, \tau(a)] = [\Lambda_\tau, \exp(td\tau(X))] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}[\Lambda_\tau, (d\tau(X))^n] = 0.$$

SO(3) は連結だから (問題 3.2.2)，事実 3.2.12 より任意の元 $g \in \mathrm{SO}(3)$ は $g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_r)$, $X_j \in \mathfrak{so}(3)$ と書ける．$g_j := \exp(X_j)$ と置くと，上の議論から $[\Lambda_\tau, g_j] = 0$. これを用いて，積の長さ r に関する帰納法で $[\Lambda_\tau, \tau(g)] = 0$ を示そう．$r = 1$ の場合は $[\Lambda_\tau, g_j] = 0$ によって成立する．長さが $r-1$ の場合に成り立つと仮定すると，

$$[\Lambda_\tau, \tau(g)] = [\Lambda_\tau, g_1]g_2\cdots g_r + g_1[\Lambda_\tau, g_2\cdots g_r] = 0.$$

さて $d\tau(X)$ と Λ_τ の可換性を示そう．$a_j := (d\tau)(A_j)$ とすると $[a_j, a_k] = a_l$, $(j,k,l) = (1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ となる．これから

$$[a_1^2, a_3] = a_1[a_1, a_3] + [a_1, a_3]a_1 = -a_1a_2 - a_2a_1,$$
$$[a_2^2, a_3] = a_2[a_2, a_3] + [a_2, a_3]a_2 = a_2a_1 + a_1a_2, \quad [a_3^2, a_3] = 0$$

と計算できて, $[\Lambda_\tau, a_3] = \sum_{j=1}^3 [a_j^2, a_3] = 0$. この計算は a_j 達の添字 j に $(1,2,3)$ の巡回置換を施しても成立するから, $[\Lambda_\tau, a_1] = [\Lambda_\tau, a_1] = 0$. (A_1, A_2, A_3) は $\mathfrak{so}(3)$ の基底なので, これで任意の $X \in \mathfrak{so}(3)$ に対して可換性が示せた.

(2) Schur の補題 2 (定理 2.3.12) と (1) から従う.

(3) $\mathfrak{so}(3)$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプル (5.2.1) を用いると $EF = (-iA_1 - A_2)(-iA_1 + A_2) = -A_1^2 - A_2^2 - i(A_1A_2 - A_2A_1) = -A_1^2 - A_2^2 - iA_3$ なので, $H = -2iA_3$ と合わせて

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \;=\; -EF - iA_3 + A_3^2 \;=\; -EF + \frac{1}{2}H - \frac{1}{4}H^2.$$

従って

$$\Lambda_\tau \;=\; -d\tau(E)d\tau(F) + \frac{1}{2}d\tau(H) - \frac{1}{4}d\tau(H)^2.$$

微分表現 $(d\tau_l, L_{2l})$ の基底 $(y_{l,m})_{m=l,l-1,\dots,-l}$ に対する $\mathfrak{sl}_2$ トリプルの作用 (定義 5.2.2)

$$d\tau_l(E)y_{l,m} \;=\; a_{l,m}y_{l,m+1}, \quad d\tau_l(F)y_{l,m} \;=\; y_{l,m-1}, \quad d\tau_l(H)y_{l,m} \;=\; 2my_{l,m}$$

(但し $a_{l,m} := l(l+1) - m(m+1)$) を使うと

$$\begin{aligned}\Lambda_{\tau_l}y_{l,m} \;&=\; \Big(-d\tau(E)d\tau(F) + \frac{1}{2}d\tau(H) - \frac{1}{4}d\tau(H)^2\Big)y_{l,m} \\ &=\; (-a_{l,m-1} + m - m^2)y_{l,m} \;=\; -l(l+1)y_{l,m}.\end{aligned}$$

(4) 補題 5.2.4 の $dT(A_j)$ を用いて計算する. $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$, $\overline{c} := \cos\phi$, $\overline{s} := \sin\phi$ 及び $\partial_\theta := \frac{\partial}{\partial\theta}$, $\partial_\phi := \frac{\partial}{\partial\phi}$ と略記すると

$$\begin{aligned}\Lambda \;&=\; dT(A_1)^2 + dT(A_2)^2 + dT(A_3)^2 \;=\; \big(\overline{s}\partial_\theta + (c/s)\overline{c}\partial_\phi\big)^2 + \big(-\overline{c}\partial_\theta + (c/s)\overline{s}\partial_\phi\big)^2 + \partial_\phi^2 \\ &=\; \big(\overline{s}^2\partial_\theta^2 + 2(c/s)\overline{cs}\partial_\theta\partial_\phi - (1/s^2)\overline{cs}\partial_\phi + (c/s)\overline{c}^2\partial_\theta + (c/s)^2\overline{c}^2\partial_\phi^2 - (c/s)^2\overline{cs}\partial_\phi\big) \\ &\quad + \big(\overline{c}^2\partial_\theta^2 - 2(c/s)\overline{cs}\partial_\theta\partial_\phi + (1/s^2)\overline{cs}\partial_\phi + (c/s)\overline{s}^2\partial_\theta + (c/s)^2\overline{s}^2\partial_\phi^2 + (c/s)^2\overline{cs}\partial_\phi\big) + \partial_\phi^2 \\ &=\; \partial_\theta^2 + (c/s)\partial_\theta + (c/s)^2\partial_\phi^2 + \partial_\phi^2 \;=\; s^{-1}\partial_\theta(s\partial_\theta) + s^{-2}\partial_\phi^2.\end{aligned}$$

□

注意 5.2.8. Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ には積は定義されておらず, $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -EF + \frac{1}{2}H - \frac{1}{4}H^2$ は $\mathfrak{so}(3)$ の元ではない. しかし Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡環** $U(\mathfrak{g})$ を考えると, $X, Y \in \mathfrak{g}$ の積に意味があって, $XY \in U(\mathfrak{g})$ となる. $\mathfrak{sl}_2$ トリプル E, F, H の二次式

$$\Omega \;:=\; 2EF + 2FE + H^2 \in U(\mathfrak{sl}_2)$$

は **Casimir 元**と呼ばれていて, これは普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の中心元である. 定理 5.2.7 (1) の計算は, 本質的にはこのことを証明している. そして (1) は, 三次元 Laplace 作用素の $\Delta = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r) + r^{-2}\Lambda$ の偏角部分 Λ は Casimir 元 Ω の球関数への作用を極座標で書いたものである, ということを主張している.

命題 5.2.9. 定理 5.2.6 の関数 $P_l^m(x) := \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$ $(l \in \mathbb{N},\ m = l, l-1, \dots, -l)$ は次の微分方程式を満たす.

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}\Big) + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)P_l^m \;=\; 0.$$

証明. 定理 5.2.7 より $y_{l,-m}(\theta,\phi)$ は $\Lambda y_{l,-m} = -l(l+1)y_{l,-m}$ を満たす. $y_{l,-m} = e^{im\phi}P_l^m$ を代入して両辺を $e^{im\phi}$ で割れば

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta}\Big) + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)P_l^m(\cos\theta) \;=\; 0.$$

これを $x = \cos\theta$ で書き直せば結論が得られる. □

系 5.2.10. 定理 5.2.6 の関数 $P_l^m(x) := \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$ について, 等式

$$P_l^{-m}(x) \;=\; (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

が成立する. 特に $P_l^m(x)$ は定理 1.3.1 の Legendre 陪関数

$$\frac{(-1)^m}{2^l l!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$$

と一致する. また定理 5.2.6 の関数 $y_{l,m}(\theta,\phi)$ について, $Y_{l,m}(\theta,\phi) = y_{l,-m}(\theta,\phi)$ は定理 1.3.1 の球面調和関数と一致する. そして定理 1.3.1 が成立する.

証明. 定義から $P_l^m(x)$ と $P_l^{-m}(x)$ は共に $(1-x^2)^{-m/2}\times(x$ の $l+m$ 次多項式$)$ である. 一方で命題 5.2.9 より $P_l^m(x)$ と $P_l^{-m}(x)$ は同じ微分方程式を満たす. この方程式は二次の常微分方程式だから, 解の空間は二次元で, 最初に述べた式の形から $P_l^m(x)$ と $P_l^{-m}(x)$ は定数倍を除いて一致する. その定数は $(1-x^2)^{-m/2}x^{l+m}$ の係数を比較すれば求まるが,

$$\begin{aligned}
(P_l^m(x)\text{ における係数}) &= \frac{1}{2^l l!}\cdot\Big((1-x^2)^m\frac{d^{l+m}x^{2l}}{dx^{l+m}}\text{ の }x^{l+m}\text{ の係数}\Big)\\
&= \frac{(-1)^m}{2^l l!}\cdot(2l)(2l-1)\cdots(2l-(l+m-1)) \;=\; \frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{(-1)^m}{(l-m)!},\\
(P_l^{-m}(x)\text{ における係数}) &= \frac{1}{2^l l!}\cdot\Big(\frac{d^{l-m}x^{2l}}{dx^{l-m}}\text{ の }x^{l+m}\text{ の係数}\Big)\\
&= \frac{1}{2^l l!}\cdot(2l)(2l-1)\cdots(2l-(l-m-1)) \;=\; \frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{(l+m)!}.
\end{aligned}$$

これから前半の主張が得られる. 後半は定理 1.3.1 の記号と比較すれば直ぐに得られる. □

最後に球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ のノルムを決定しよう.

命題 5.2.11. 球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ $(l\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z},\ |m|\le l)$ は次の直交関係式を満たす.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y_{l,m}(\theta,\phi)}Y_{l',m'}(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta d\phi \;=\; \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\frac{1}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

証明. $(l,m) = (l',m')$ でなければ 0 になることは直交関係 (定理 4.3.6) から明らか. 以下では $(l,m) = (l',m')$ の場合のみを考える.

$Y_{l,m}(\theta,\phi) = e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta)$ だから, Legendre 陪関数 $P_l^m(x)$, $x = \cos\theta$ に関する積分

$$I_m \;:=\; \int_{-1}^{1}P_l^m(x)^2\,dx \;=\; \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{5.2.3}$$

が示せれば, $\int_0^{2\pi} \overline{e^{im\phi}} e^{im\phi}\, d\phi = 2\pi$ より結論が得られる．Legendre 陪関数 $P_l^m(x)$ を Legendre 多項式 $P_l(x) = P_l^0(x)$ を用いて

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_l(x), \quad P_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{ds^l} (x^2-1)^l$$

と書き直すと, 部分積分によって

$$I_m = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}\Big). \tag{5.2.4}$$

一方で命題 5.2.9 より Legendre 多項式 $P_l(x)$ は

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_l}{dx^2} - 2x \frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0$$

を満たす．これを $m-1$ 回微分して整理すると

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1} P_l}{dx^{m+1}} - 2mx \frac{d^m P_l}{dx^m} + (l+m)(l-m+1)\frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}} = 0 \tag{5.2.5}$$

が得られる (問題 5.2.2)．更に $(1-x^2)^{m-1}$ を掛けると

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{d^m P_l}{dx^m}\Big) = -(l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}}$$

が得られる．これを (5.2.4) に代入すると, 漸化式

$$I_m = (l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}} dx = (l+m)(l-m+1) I_{m-1}$$

が得られる．よって

$$\begin{aligned} I_m &= (l+m)(l-m+1)\cdot(l+m-1)(l-m+2)\cdot I_{m-2} = \cdots \\ &= (l+m)(l-m-1)\cdots(l+1)\cdot(l-m+1)(l-m+2)\cdots l \cdot I_0 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} I_0. \end{aligned}$$

従って目的の (5.2.3) は, Legendre 多項式 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{ds^l}(x^2-1)^l$ のノルムの公式

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)^2\, dx = \frac{2}{2l+1} \tag{5.2.6}$$

に帰着される．この等式の証明は問題 5.2.3 とする．　□

演習問題 (解答: 75 ページ)

問題 5.2.1. 補題 5.2.4 の微分演算子 $(dT)(A_j) : C(S^2) \to C(S^2)$ について, 関係式 $[(dT)(A_j), (dT)(A_k)] = (dT)(A_l)$, $(j,k,l) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ が成立することを確かめよ．

問題 5.2.2. 等式 (5.2.5) を導出せよ．

問題 5.2.3. 等式 (5.2.6) を示せ．

5.3　レポート問題

レポート問題 5 (解答: 78 ページ)**.** 二次元球面 $S^2 = \{{}^T(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の極座標

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta$$

について, 以下の微分の変換公式を示せ.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

6　問題の解答

簡単のため偏微分作用素を $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ 等と略記する．

1　水素原子型 Schrödinger 方程式

§1.2　Schrödinger 方程式の基本 (問題: 8 ページ)

問題 1.2.1. Schrödinger 方程式 (1.1.3) とポテンシャル V が実数値であることから

$$\partial_t\rho \;=\; \partial_t(\overline{\psi}\psi) \;=\; (\partial_t\overline{\psi})\psi + \overline{\psi}\partial_t\psi \;=\; -\frac{\hbar}{2mi}\big(\overline{\psi}\Delta\psi - \psi\Delta\overline{\psi}\big).$$

一方 $\boldsymbol{j}$ の定義 (1.1.5) から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} \;=\; \frac{\hbar}{2mi}\big((\nabla\overline{\psi})(\nabla\psi) + \overline{\psi}\Delta\psi - (\nabla\psi)(\nabla\overline{\psi}) - \psi\Delta\psi^*\big) \;=\; \frac{\hbar}{2mi}\big(\overline{\psi}\Delta\psi - \psi\Delta\overline{\psi}\big).$$

よって $\partial_t\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$.

問題 1.2.2. $\boldsymbol{x}_1 = {}^T(x_{11},\ldots,x_{1n})$, $\boldsymbol{x}_2 = {}^T(x_{21},\ldots,x_{2n})$, $\boldsymbol{X} = {}^T(X_1,\ldots,X_n)$, $\boldsymbol{x} = {}^T(x_1,\ldots,x_n)$ とする．

$$\boldsymbol{x}_1 \;=\; \boldsymbol{X} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}_2 \;=\; \boldsymbol{X} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{x}$$

より，各 $k = 1,\ldots,n$ について

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_k} &= \frac{\partial x_{1k}}{\partial X_k}\frac{\partial}{\partial x_{1k}} + \frac{\partial x_{2k}}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_{2k}} = \frac{\partial}{\partial x_{1k}} + \frac{\partial}{\partial x_{2k}},\\ \frac{\partial}{\partial x_k} &= \frac{\partial x_{1k}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_{1k}} + \frac{\partial x_{2k}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_{2k}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial x_{1k}} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial X_k^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} &= \frac{1}{m_1+m_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{1k}} + \frac{\partial}{\partial x_{2k}}\Big)^2 + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\Big(\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial x_{1k}} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\Big)^2\\ &= \Big(\frac{1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{m_1+m_2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_{1k}^2} + \Big(\frac{1}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_2}\frac{1}{m_1+m_2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_{2k}^2}\\ &= \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_{1k}^2} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_{2k}^2}\end{aligned}$$

となって，k について和を取ることで $M^{-1}\Delta_{\boldsymbol{X}} + \mu^{-1}\Delta_{\boldsymbol{x}} = m_1^{-1}\Delta_{\boldsymbol{x}_1} + m_2^{-1}\Delta_{\boldsymbol{x}_2}$ が得られる．

§1.3　水素原子型 Schrödinger 方程式 (問題: 10 ページ)

問題 1.3.1. 簡単のため $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$, $\overline{c} := \cos\phi$, $\overline{s} := \sin\phi$ と略記する．まず連鎖律

$$\partial_x \;=\; r_x\partial_r + \theta_x\partial_\theta + \phi_x\partial_\phi$$

に注意して，$r_x = \frac{\partial r}{\partial x}$, $\theta_x = \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\phi_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ を決定して ∂_x を書き換えよう．$x^2+y^2+z^2 = r^2$ の辺々を x で微分すると $2x = 2rr_x$ なので $r_x = x/r = s\overline{c}$. また $\tan\theta = \sqrt{x^2+y^2}/z$ を微分すると $\theta_x/c^2 = \overline{c}/(rc)$ なので $\theta_x = r^{-1}c\overline{c}$. 同様に $\tan\phi = y/x$ から $\phi_x/\overline{c}^2 = -\overline{s}/(rs\overline{c}^2)$ となるので $\phi_x = -r^{-1}s^{-1}\overline{s}$. 従って

$$\partial_x \;=\; s\overline{c}\partial_r + r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta - r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi.$$

これを元に ∂_x^2 を計算する．展開するときに微分作用素が非可換であることに注意して

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 &= (s\overline{c}\partial_r + r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta - r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi)^2 \\
&= (s\overline{c}\partial_r)^2 + (r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta)^2 + (r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi)^2 \\
&\quad + (s\overline{c}\partial_r)(r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta) + (r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta)(s\overline{c}\partial_r) \\
&\quad - (r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta)(r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi) - (r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi)(r^{-1}c\overline{c}\partial_\theta) \\
&\quad - (s\overline{c}\partial_r)(r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi) - (r^{-1}s^{-1}\overline{s}\partial_\phi)(s\overline{c}\partial_r).
\end{aligned}
$$

次に Leibniz 則を使って微分作用素の合成を計算すると

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 &= s^2\overline{c}^2\partial_r^2 + \bigl(r^{-2}c^2\overline{c}^2\partial_\theta^2 - r^{-2}cs\overline{c}^2\partial_\theta\bigr) + \bigl(r^{-2}s^{-2}\overline{s}^2\partial_\phi^2 + r^{-2}s^{-2}\overline{cs}\partial_\phi\bigr) \\
&\quad + 2r^{-1}cs\overline{c}^2\partial_r\partial_\theta - r^{-2}cs\overline{c}^2\partial_\theta + r^{-1}c^2\overline{c}^2\partial_r \\
&\quad - 2r^{-2}cs^{-1}\overline{cs}\partial_\theta\partial_\phi + r^{-2}c^2s^{-2}\overline{cs}\partial_\phi + r^{-2}cs^{-1}\overline{s}^2\partial_\theta \\
&\quad - 2r^{-1}\overline{cs}\partial_r\partial_\phi + r^{-2}\overline{cs}\partial_\phi + r^{-1}\overline{s}^2\partial_r.
\end{aligned}
$$

同様に ∂_y について計算すると

$$
\begin{aligned}
\partial_y &= s\overline{s}\partial_r + r^{-1}c\overline{s}\partial_\theta + r^{-1}s^{-1}\overline{c}\partial_\phi, \\
\partial_y^2 &= s^2\overline{s}^2\partial_r^2 + \bigl(r^{-2}c^2\overline{s}^2\partial_\theta^2 - r^{-2}cs\overline{s}^2\partial_\theta\bigr) + \bigl(r^{-2}s^{-2}\overline{c}^2\partial_\phi^2 - r^{-2}s^{-2}\overline{cs}\partial_\phi\bigr) \\
&\quad + 2r^{-1}cs\overline{s}^2\partial_r\partial_\theta - r^{-2}cs\overline{s}^2\partial_\theta + r^{-1}c^2\overline{s}^2\partial_r \\
&\quad + 2r^{-2}cs^{-1}\overline{cs}\partial_\theta\partial_\phi - r^{-2}c^2s^{-2}\overline{cs}\partial_\phi + r^{-2}cs^{-1}\overline{c}^2\partial_\theta \\
&\quad + 2r^{-1}\overline{cs}\partial_r\partial_\phi - r^{-2}\overline{cs}\partial_\phi + r^{-1}\overline{c}^2\partial_r.
\end{aligned}
$$

$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ より先に $\partial_x^2 + \partial_y^2$ を計算しておくと

$$
\partial_x^2 + \partial_y^2 = s^2\partial_r^2 + r^{-2}c^2\partial_\theta^2 + r^{-2}s^{-2}\partial_\phi^2 + 2r^{-1}cs\partial_r\partial_\theta + r^{-1}(1+c^2)\partial_r + r^{-2}c(s^{-1} - 2s)\partial_\theta.
$$

∂_z については $\phi_z = 0$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\partial_z &= c\partial_r - r^{-1}c\overline{s}\partial_\theta, \\
\partial_z^2 &= s^2\overline{s}^2\partial_r^2 + r^{-2}s^2\partial_\theta^2 - 2r^{-1}cs\partial_r\partial_\theta + r^{-1}s^2\partial_r + 2r^{-2}cs\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \partial_r^2 + 2r^{-1}\partial_r + r^{-2}(1 + cs^{-1})\partial_\theta^2 + r^{-2}s^{-2}\partial_\phi^2 \\
&= r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r) + r^{-2}\bigl(s^{-1}\partial_\theta(s\partial_\theta) + s^{-2}\partial_\phi\bigr)
\end{aligned}
$$

となって結論が得られる．

問題 1.3.2. 略.

問題 1.3.3. 方程式 (1.3.3) に級数表示を代入して項別微分すると

$$
\sum_{k\geq 0} k(k-1)a_k r^{k-2} + \sum_{k\geq 0} 2(l+1)ka_k r^{k-2} - \sum_{k\geq 0} 2\kappa k a_k r^{k-1} + \sum_{k\geq 0} 2a_k r^{k-1} - \sum_{k\geq 0} 2\kappa(l+1)a_k r^{k-1} = 0.
$$

r^{k-1} の係数をまとめると

$$
(k+1)(k+2(l+1))a_{k+1} = \bigl(2\kappa(k+l+1) - 2\bigr)a_k \quad (k \in \mathbb{N})
$$

となって, 結論の漸化式が得られる.

2 SO(3) と SU(2)

問題 2.0.1 (問題は 14 ページ)**.** 群とは, 集合 G と写像 $\cdot : G \times G \to G$ (乗法), $(\ )^{-1} : G \to G$ (逆元) 及び元 $e \in G$ (単位元) からなる四つ組 $(G, \cdot, (\ )^{-1}, e)$ であって, 任意の $x, y, z \in G$ に対して $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot e = e \cdot x = x$ 及び $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ が成立するもののことである.

問題 2.0.2. 恒等写像 $\mathrm{id} : V \to V$ は可逆な線形写像である. 二つの可逆な線形写像 $f, g : V \to V$ について, 合成 $f \circ g$ もまた可逆な線形写像である. そこで $\mathrm{GL}(V)$ の乗法を $f \cdot g := f \circ g$ で, f の逆元 f^{-1} を逆写像で, 単位元を id で定義すれば, 問題 2.0.1 の条件が成立する. 従って $\mathrm{GL}(V)$ は群である.

2.1 回転群 (問題: 17 ページ)

問題 2.1.1. 集合 M 上の距離とは写像 $d : M^2 \to \mathbb{R}$ であって, 任意の $x, y, z \in M$ に対して $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ が成立するもののことである.

(2.1.1) の d が $\mathbb{R}^n$ 上の距離を定めることについて, 三角不等式 $\|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\|$ のみが非自明である. $u := x - y$, $v := y - z$ として, 示すべき不等式は $\|u\| + \|v\| \ge \|u + v\|$. 辺々を二乗して引くと $\|u\|\,\|v\| \ge |(u, v)|$ となって, これは Schwarz の不等式 (補題 2.1.1 (3)) に他ならないが, それは問題 2.1.2 で示す.

問題 2.1.2. Schwarz の不等式 $|(x, y)| \le \|x\|\,\|y\|$ のみが非自明である. $x = 0$ なら自明なので $x \ne 0$ と仮定する. 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\|tx - y\| \ge 0$ であるが, これを t の二次式 $\|x\|^2 t^2 - 2(x, y)t + \|y\|^2$ に関する不等式とみなせば, 判別式 $4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ が非正であるという条件が必要十分. 従って示せた.

問題 2.1.3. 任意の $x, y \in E^n$ と $O \in \mathrm{O}(n)$ に対して $\|Ox - Oy\| = \|x - y\|$ を示したいが, $Ox - Oy = O(x - y)$ より $\|Ox\| = \|x\|$ を示せば十分. $\|Ox\|^2 = (Ox, Ox) = {}^T(Ox)(Ox) = {}^Tx{}^TOOx = {}^Txx = \|x\|^2$ より示せた.

問題 2.1.4. (i) $\Rightarrow$ (iii) は問題 2.1.3 で示した. その逆 (iii) $\Rightarrow$ (i) も, 問題 2.1.3 における計算 $\|Ax\|^2 = {}^Tx{}^TAAx$ から $\|Ax\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow {}^TAA = I$ となって示せる. (ii) $\iff$ (iii) は補題 2.1.1 (2) の $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x, y)$ から従う.

問題 2.1.5.
(1) 中線定理より $\|g(x) + g(y)\| + \|g(x) - g(y)\| = 2(\|g(x)\| + \|g(y)\|$ だが, $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ (2.1.2) と $\|g(x)\| = \|x\|$ (2.1.3) から $\|g(x) + g(y)\| + \|x - y\| = 2(\|x\| + \|y\|$. 一方で中線定理より $\|x + y\| + \|x - y\| = 2(\|x\| + \|y\|$ だから $\|g(x) + g(y)\| = \|x + y\|$.
(2) $f(x) = Ox + a = Px + b$ と二通りに書けたとする. $x = 0$ として $a = b$. すると任意の $x \in E^n$ に対して $Ox = Px$. これは線形変換として O と P が一致することを意味するから, 対応する行列も等しい.

問題 2.1.6. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$ を示せばよいが, $f \circ f^{-1}(x) = f(O^{-1}x - O^{-1}a) = O(O^{-1}x - O^{-1}a) + a = OO^{-1}x - OO^{-1}a + a = x$ と $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(Ox + a) = O^{-1}(Ox + a) - O^{-1}a = OO^{-1}x + O^{-1}a - O^{-1}a = x$ より主張が成立する.

問題 2.1.7. 直交行列 O について, ${}^TOO = I$ の両辺の行列式を取って $\det({}^TOO) = 1$. 一方で $\det({}^TOO) = \det({}^TO)\det O = (\det O)^2$. 従って $\det O = \pm 1$.

問題 2.1.8. $O = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SO}(2)$ とすると, $O^TO = I$ から $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. 初めの二つの等式から $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, $c=\sin\phi$, $d=\cos\phi$ と書ける. 三つ目の等式から $\sin(\theta+\phi)=0$ なので $\phi=-\theta+m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$. 従って $c=-(-1)^m\sin\theta$, $d=(-1)^m\cos\theta$ となる. 最後に $\det O=1$ から $ad-bc=(-1)^m=1$ となり, $m\in 2\mathbb{Z}$ が従う. これから結論が従う.

2.2 二次元特殊ユニタリ群と三次元回転群 (問題: 22 ページ)

問題 2.3.1. n 次複素正則行列全体の集合 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ が群をなすことは問題 2.0.2 で実質示している. $\mathrm{U}(n)$ が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群であることを示そう. 単位行列 I は $\mathrm{U}(n)$ に含まれる. $U\in\mathrm{U}(n)$ ならば $(U^{-1})^*=(U^*)^*=U=(U^{-1})^{-1}$ だから $U^{-1}\in\mathrm{U}(n)$. また $U,V\in\mathrm{U}(n)$ ならば $(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}$ だから $UV\in\mathrm{U}(n)$. 以上より $\mathrm{U}(n)$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群である.

次に $\mathrm{SU}(n)$ が $\mathrm{U}(n)$ の部分群であることを示そう. 単位行列 I は $\mathrm{SU}(n)$ に含まれる. $U\in\mathrm{SU}(n)$ ならば $\det(U^{-1})=(\det U)^{-1}=1$ と前半の議論より $U\in\mathrm{SU}(n)$. また $U,V\in\mathrm{SU}(n)$ ならば $\det(UV)=\det(U)\det(V)=1$ と前半の議論より $UV\in\mathrm{SU}(n)$. よって $\mathrm{SU}(n)$ は $\mathrm{U}(n)$ の部分群である.

問題 2.3.2. (1) 正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して $\|A\|:=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|}$ とすると, 行列の列 $\{A_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ について $\lim_{m\to\infty}A_m=A$ と $\lim_{m\to\infty}\|A_m-A\|=0$ は同値. 従って $S_m:=\sum_{n=0}^m\frac{1}{n!}A^n$ として列 $\{S_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ が $\|\ \|$ に関して Cauchy 列であることを示せばよい. 同じサイズの正方行列 A と B に対して $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ 及び $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$ が成立する (問題 3.1.1) ことに注意して, $s_N:=\sum_{n=0}^N\frac{1}{n!}\|A\|^n$ とおくと

$$\|S_M-S_N\| = \left\|\sum_{n=N}^M\frac{1}{n!}A^n\right\| \le \sum_{n=N}^M\frac{1}{n!}\|A\|^n = |s_M-s_N|.$$

実数列 $\{s_N \mid N\in\mathbb{N}\}$ は $\exp(\|A\|)$ に収束するから, $\{S_N \mid n\in\mathbb{N}\}$ も Cauchy 列だと分かる.

(2) $AB=BA$ より $(A+B)^m$ の展開に二項定理が使えて,

$$\sum_{n=0}^{2m}\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{2m}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^m\frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^m\frac{B^n}{n!}\right)+R_m,\quad R_m:=\sum_{(k,l)}\frac{A^k}{k!}\frac{B^l}{l!}$$

と書ける. 但し R_m の和は $\max\{k,l\}>m$ かつ $k+l\le 2m$ の範囲に渡る. そのような (k,l) は $m(m+1)$ 組あるから, $M:=\max\{\|A\|,\|B\|,1\}$ とすれば

$$\|R_m\| \le \sum_{(k,l)}\frac{\|A\|^k}{k!}\frac{\|A\|^l}{l!} \le \frac{m(m+1)}{m!}M^{2m}$$

となり, $m\to\infty$ で 0 に収束する. 従って最初の等式で $m\to\infty$ として $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$ が得られる.

(3) $A=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 及び $B=\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ が例. 実際, $\exp A=I+A=\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ と $\exp B=I+B=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ より $\exp(A)\exp(B)=\left[\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right]$. 一方で $A+B=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ と $(A+B)^2=I$ から $\exp(A+B)=\sum_{n\ge0}I/(2n)!+\sum_{n\ge0}(A+B)/(2n+1)!=xI+y(A+B)=\left[\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right]$, $x:=(e+1/e)/2$, $y:=(e-1/e)/2$. よって $\exp(A+B)\neq\exp(A)\exp(B)$.

問題 2.3.3. n 次複素行列 A の固有値を $a_1,\dots,a_n$ とすると, 適当な正則行列 P があって PAP^{-1} は対角成分が $a_1,\dots,a_n$ の上三角行列になる. すると $\exp(PAP^{-1})$ は対角成分が $\exp(a_1),\dots,\exp(a_n)$ の上三角行列

である. $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$ に注意して,

$$\det(\exp(A)) = \det(P\exp(A)P^{-1}) = \det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(a_1)\cdots\exp(a_n) = \exp(\operatorname{tr} A).$$

問題 2.3.4. 実線形空間であることを示すには実数倍と加法で閉じていることを示せばよい. 詳細は略す.

X がエルミート行列であるための条件 $X + X^* = 0$ より, 対角成分は任意の純虚数であり, 非対角成分は上三角部分から下三角部分が一意に決まるので, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) = n + 2\binom{n}{2} = n^2$. また $\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{u}(n)$ の元のうちトレースが 0 のものだから $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) - 1 = n^2 - 1$.

問題 2.3.5. $h_\theta^* = \operatorname{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) = h_\theta^{-1}$ と $\det h_\theta = 1$ より $h_\theta \in \mathrm{SU}(n)$. また $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$ と略記すれば, $k_\theta^* = {}^T k_\theta = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = k_\theta^{-1}$ と $\det k_\theta = 1$ より $k_\theta \in \mathrm{SU}(n)$ が従う.

問題 2.3.6. $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$, $\overline{c} := \cos 2\theta$, $\overline{s} := \sin 2\theta$ と略記すれば

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ad} k_\theta)(e_1) &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i\overline{s} & i\overline{c} \\ i\overline{c} & i\overline{s} \end{bmatrix} = e_1 \cos 2\theta - e_3 \sin 2\theta, \\
(\operatorname{Ad} k_\theta)(e_2) &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = e_2, \\
(\operatorname{Ad} k_\theta)(e_3) &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i\overline{c} & i\overline{s} \\ i\overline{s} & -i\overline{c} \end{bmatrix} = e_1 \sin 2\theta + e_3 \cos 2\theta
\end{aligned}$$

となるので, 表現行列は補題 2.2.12 の通りになる.

問題 2.3.7. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ から $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B)$ となること, 及び $g \in G$ について $g^* = g^{-1}$ となることに注意して, $\big((\operatorname{Ad} g)(X), (\operatorname{Ad} g)(Y)\big) = \operatorname{tr}(gXg^{-1}(gYg^{-1})^*) = \operatorname{tr}(gXg^{-1}(g^{-1})^* Y^* g^*) = \operatorname{tr}(gXg^{-1}gY^*g^{-1}) \operatorname{tr}(XY) = (X, Y)$.

2.3　群の表現 (問題: 26 ページ)

問題 2.3.1. 反射律, 対称律, 推移律を示す. 反射律 $(\rho, V) \xrightarrow{\sim} (\rho, V)$ は恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ を考えれば示せる. 対称律については, $(\rho, V) \xrightarrow{\sim} (\tau, W)$ を与える線形同型 $\gamma : V \xrightarrow{\sim} W$ に対してその逆写像 $\gamma^{-1} : W \xrightarrow{\sim} V$ を考えれば, $(\tau, W) \xrightarrow{\sim} (\rho, V)$ だと分かる. 推移律は線形同型の合成を考えれば示せる.

問題 2.3.2. 表現 V が完全可約で $V = \bigoplus_{j \in J} U_j$ を既約表現の直和分解とすると, 不変部分空間 $U \subset V$ に対して部分集合 $K \subset J$ があって $U = \bigoplus_{k \in K} U_k$ となる. 実際, $K := \{j \in J \mid U_j \cap U \neq \{0\}\}$ とすると, $k \in K$ なら $U_k \subset U$ が言える (そうでないと仮定すると U_k の既約性と矛盾する). 従って $\bigoplus_{k \in K} U_k \subset U$. 逆の包含関係も K の定め方から従う. よって $V = U \oplus U'$, $U' := \bigoplus_{j \in J \setminus K} U_j$ となり, 補空間 $V/U = U'$ も不変部分空間である.

逆を表現の次元に関する帰納法で証明する. 表現 V の任意の不変部分空間の補空間が不変部分空間だと仮定する. V が既約なら完全可約だから, 可約だと仮定してよい. すると $0 \subsetneq U \subsetneq V$ なる不変部分空間 U が存在する. 仮定より不変部分空間 V/U が存在する. U と V/U に帰納法の仮定を用いれば, 各々が既約表現の直和で書けるので, $V = U \oplus V/U$ も既約表現の直和で書ける.

問題 2.3.3. (1) は略. (2) について, 完全可約だと仮定すると $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$, U と V は一次元既約表現と直和分解できる. しかし $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ の不変部分空間は 0, $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}^2$ の三つであり, $U = \mathbb{R}e_1$ となるしかないが, T の定義から $V = \mathbb{R}e_2$ は不変部分空間ではなく, 矛盾する.

問題 2.3.4. $(e_1, \ldots, e_n)$ を V の正規直交基底とし, $g \in G$ を任意にとる. $\rho(g)e_j = \sum_k e_k a_{kj}$, $a_{kj} \in \mathbb{C}$ とおけば, e_j 達に関する $\rho(g)$ の表現行列は $A = [a_{lm}]_{l,m=1}^n$ である. 一方でユニタリ表現の定義と e_j 達が正規直交基底であることから $(\rho(g)e_j, \rho(g)e_k) = (e_j, e_k) = \delta_{j,k}$ となる. $(\ ,\ )$ が Hermite 型式であることに注意すると

$$(\rho(g)e_j, \rho(g)e_k) = \left(\sum_l e_l a_{lj}, \sum_m e_m a_{mk}\right) = \sum_{l,m} \overline{a_{lj}} a_{mk} \delta_{l,m} = \sum_l \overline{a_{lj}} a_{lk} = (A^* A)_{jk}.$$

よって $A^* A = I$ となり, A はユニタリ行列である.

問題 2.3.5. 必要性は明らか. $(v+w, v+w) = (v,v) + (w,w) + 2\,\mathrm{Re}(v,w)$ と $(v+iw, v+iw) = (v,v) + (w,w) - 2\,\mathrm{Im}(v,w)$ より $(v,w) = \frac{1}{2}(v+w, v+w) - \frac{1}{2}(v+iw, v+iw)$ となることに注意すると, 十分性も簡単に示せる.

3 線形 Lie 群の表現

3.1 線形 Lie 群とその Lie 環 (問題: 30 ページ)

問題 3.1.1. (1) $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$ は Euclid ノルムの三角不等式 (問題 2.1.1) から従う．後半について．$Y = [y_{jk}]$ とすると XY の jk 成分は $\sum_l x_{jl}y_{lk}$ だから, Schwarz の不等式 (補題 2.1.1 (3)) より

$$\|XY\|^2 = \sum_{j,k}\Big|\sum_l x_{jl}y_{lk}\Big|^2 \le \sum_{j,k}\Big(\sum_l |x_{jl}|^2\Big)\Big(\sum_l |y_{lk}|^2\Big) = \Big(\sum_{j,l}|x_{jl}|^2\Big)\Big(\sum_{k,l}|y_{lk}|^2\Big) = \|X\|^2\,\|Y\|^2.$$

(2) $\exp(X)\exp(Y) - \exp(X+Y)$ を極限で

$$\exp(X)\exp(Y) - \exp(X+Y) = \lim_{r\to\infty}\Big(\sum_{n=0}^{r}\frac{X^n}{n!}\sum_{n=0}^{r}\frac{Y^n}{n!} - \sum_{n=0}^{r}\frac{(X+Y)^n}{n!}\Big)$$

と書き直す．右辺の括弧内を展開したときに現れる, k 個の X と l 個の Y の積の項は, 第一項からは $X^kY^l/(k!l!)$ のみ, 第二項からは $(X+Y)^{k+l}$ の展開から $\binom{k+l}{k}$ 個ある．これらの項のノルム $\|\ \|$ を評価すると, (1) から

$$\le \frac{1}{k!l!}\|X\|^k\|Y\|^l + \binom{k+l}{k}\frac{1}{(k+l)!}\|X\|^k\|Y\|^l = \frac{2}{k!l!}\|X\|^k\|Y\|^l.$$

従って

$$\|\exp(X)\exp(Y) - \exp(X+Y)\| \le \sum_{k,l\ge 1}\frac{2}{k!l!}\|X\|^k\|Y\|^l = 2(e^{\|X\|}-1)(e^{\|Y\|}-1) = O(\|X\|\,\|Y\|).$$

(3) (1) より $\left\|\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(A-I)^m/m!\right\| \le \sum_{m=1}^{n}\|A-I\|^m/m$. 実級数 $\sum_{m=1}^{\infty}x^m/m!$ は $|x|<1$ で $\log(1-x)$ に収束するから, $\|A-I\|<1$ ならば $\log A$ は収束する．

(4) $\exp\log A = A$ について．極限を使って

$$\exp\log A - A = \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}EL_{k,l}, \quad EL_{k,l} := \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\Big(\sum_{p=1}^{l}\frac{(-1)^{p-1}}{p}(A-I)^p\Big)^m - A$$

と書き直す．$r \in \mathbb{N}$ を任意にとると, $EL_{k,l}$ の A に関する r 次以下の項は, 実数 x に対する等式 $\exp\log x = x$ から 0 になることが分かる．$r+1$ 次以上の部分 $EL_{k,l}^{+}$ のノルムを評価すると, (1) より

$$\begin{aligned}\left\|EL_{k,l}^{+}\right\| &\le B_{k,l} := \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\Big(\sum_{p=1}^{l}\frac{1}{p}\|A-I\|^p\Big)^m + \|A-I\| + 1\\ &\le \sum_{m\ge 0}\frac{1}{m!}\Big(\sum_{p\ge 1}\frac{1}{p}\|A-I\|^p\Big)^m + \|A-I\| + 1\\ &= \exp(-\log(1-x)) + 1 + x = 1 + x + \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

但し $x := \|A-I\|$ とした．$|x|<1$ で関数 $1+x+(1-x)^{-1}$ を冪級数展開したものを $\sum_s c_sx^s$ と書く．$0<a<1$ なる実数 a を固定すると, $\sum_s c_sa^s$ が収束するから, a のみに依存して s には依存しない正の実数 h_s が存在して, 任意の $s\in\mathbb{N}$ に対して $|c_sa^s| \le h_a$. すると $B_{k,l}$ の $|A-I|^s$ の係数 b_s に対して $|b_s| \le h_a/a^s$ となる．従って $0<d<a$ なる実数 d を固定すると, $\|A-I\|<d$ ならば

$$\left\|EL_{k,l}^{+}\right\| \le \sum_{s=r+1}^{kl}|b_s|\,d^s \le \sum_{s=r+1}^{kl}h_a\Big(\frac{d}{a}\Big)^s = \frac{ah_a}{a-d}\Big(\frac{d}{a}\Big)^{r+1}.$$

これは $r \to \infty$ で 0 に収束する．以上より $\|\exp\log A - A\| = 0$ が, 即ち $\exp\log A = A$ が示せた．$\log\exp A = A$ については, まず $\|A\| < \log 2$ ならば $\|\exp(A) - I\| \le \sum_{m\ge1} \|A\|^m/m! = \exp(\|A\|) - 1 < 1$ より $\log\exp A$ が定義できる．残りの議論は $\log\exp x = x$ を使って前半と同様にすればよい．

(5) 帰納法で示す．$n=1$ の時は自明．n まで成立していれば,

$$\begin{aligned}\left\|A^{n+1} - B^{n+1}\right\| &= \|A(A^n - B^n) + (A-B)B^n\| \le \|A\|\,\|A^n - B^n\| + \|A-B\|\,\|B\|^n \\ &\le (na^n + a^n)\,\|A-B\|^n = (n+1)a^n\,\|A-B\|^n.\end{aligned}$$

(6) (4) より $\log(\exp X \exp Y) - (X+Y) = \log(\exp X\exp Y) - \log\exp(X+Y)$．これを (3) の級数で書き直せば, ノルムは

$$\|\log(\exp X\exp Y) - (X+Y)\| \le \sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\|(\exp X\exp Y - 1)^n - (\exp(X+Y)-1)^n\|$$

と評価できる．ここで十分小さい正の実数 a を固定し, $\|X\| \le a$ かつ $\|Y\| \le a$ だとすれば, (5) より

$$\le \sum_{n\ge1}\frac{na^{n-1}}{n}\|\exp X\exp Y - \exp(X+Y)\| = \frac{1}{1-a}\|\exp X\exp Y - \exp(X+Y)\|.$$

(2) よりこれは $O(\|X\|\,\|Y\|)$ である．

(7) (6) と $\exp(A)^n = \exp(nA)$ (問題 2.2.2 (2)) より

$$\left(\exp\frac{X}{n}\exp\frac{Y}{n}\right)^n = \exp\Bigl(\frac{1}{n}(X+Y) + O\bigl(\frac{1}{n^2}\|X\|\,\|Y\|\bigr)\Bigr) = \exp\Bigl(X+Y+O\bigl(\frac{1}{n}\|X\|\,\|Y\|\bigr)\Bigr).$$

$n\to\infty$ として結論が得られる．

問題 3.1.2.　(1) $\{\exp tX, \exp tY\}$ を t について展開すると

$$\begin{aligned}\{\exp tX, \exp tY\} &= \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) \\ &= (I + tX + t^2X^2/2 + \cdots)(I + tY + t^2Y^2/2 + \cdots) \\ &\quad\times (I - tX + t^2X^2/2 + \cdots)(I - tY + t^2X^2/2 + \cdots) = I + t^2[X,Y] + O(t^3).\end{aligned}$$

$\log(I+A) = \sum_{m\ge1}\frac{(-1)^m}{m}A^m$ 及び $\log\exp A = A$, $\exp\log A = A$ (問題 3.1.1) から結論が得られる．

(2) (1) で $t = 1/n$ とした式を n^2 乗すれば

$$\left\{\exp\frac{X}{n}, \exp\frac{Y}{n}\right\}^{n^2} = \exp\Bigl(\frac{1}{n^2}[X,Y] + O(n^{-3})\Bigr)^{n^2} = \exp\Bigl([X,Y] + O(n)\Bigr).$$

$n\to\infty$ として結論が得られる．

3.2 線形 Lie 群の表現 (問題: 36 ページ)

問題 3.2.1. $g(t) := \mathrm{Ad}\exp(tX)$ とすると $\mathrm{ad}\,X = g'(0) = \frac{d}{dt}g(t)\big|_{t=0}$ から

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,X)(Y) &= \frac{d}{dt}g(t)(Y)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Bigl(\exp(tX)Y\exp(-tX)\Bigr)\Big|_{t=0} \\ &= \Bigl(\exp(tX)XY\exp(-tX) - \exp(tX)YX\exp(-tX)\Bigr)\Big|_{t=0} = XY - YX = [X,Y].\end{aligned}$$

問題 3.2.2. 任意の直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$ は, 適当な直交行列 $P \in \mathrm{O}(n)$ で

$$PAP^{-1} = I_p \oplus R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus R(\theta_q) \oplus (-I_r)$$

とブロック対角化できる．但し $\oplus$ は行列を対角に並べることを意味し, I_p は p 次の単位行列であり, また $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $R(\theta) := \left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right]$ とした.

さて $A \in \mathrm{SO}(n)$ の場合, r は偶数 $2k$ なので, $-I_r = R(\pi)^{\oplus k}$ と書ける．よって $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t) := P^{-1}\big(I_p \oplus R(t\theta_1) \oplus \cdots \oplus R(t\theta_q) \oplus R(t\pi)^{\oplus k}\big)P$$

とすれば, $f(t)$ は $f(0) = I_n$ と $f(1) = A$ を連続に結ぶ道を与える．従って $\mathrm{SO}(n)$ は連結である.

問題 3.2.3. 略.

3.3　表現のテンソル積 (問題: 39 ページ)

問題 3.3.1. $\varphi : V \times W \to U$ を双線形写像とする．$(v_j \otimes w_k)_{(j,k)\in J\times K}$ が $V \otimes W$ の基底なので, 線形写像 $\psi : V \otimes W \to U$ が $\psi(v_j \otimes w_k) := \varphi(v_j, w_k)$ で定まる．定め方から $\psi \circ \tau = \varphi$. また $\psi' \circ \tau = \varphi$ なる線形写像 $\psi' : V \otimes W \to U$ に対して, $\varphi(v_j, w_k) = (\psi' \circ \tau)(v_j, w_k) = \psi'(v_j \otimes w_k)$ だから $\psi' = \psi$ である.

問題 3.3.2. V の基底 $(v_j)_{j\in J}$ を取ると, テンソル積の構成の仕方から $(v_j \otimes 1)_{j\in J}$ は $V \otimes F$ の基底．よって $v_j \otimes 1 \mapsto v_j$ から線形写像 $V \otimes F \to V$ が定まり, これは $v_j \mapsto v_j \otimes 1$ で定まる逆写像を持つから線形同型.

問題 3.3.3. 線形空間として $V \otimes F \simeq V$ となることは問題 3.3.2 で示した．表現 V の群準同型を $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, 自明表現の群準同型を $1 : G \to \mathrm{GL}(F)$, $1(g) := \mathrm{id}_F$ と書くと, $V \otimes F$ の群準同型は $(\rho\otimes 1)(g) = \rho(g)\otimes 1(g) = \rho(g)\otimes \mathrm{id}_F$ となる．解答 3.3.2 の線形同型 $\iota : V\otimes F \xrightarrow{\sim} V$ の下で $\rho(g)\otimes\mathrm{id}_F \mapsto \rho(g)$ となるので, ι は表現の準同型である．よって主張が示せた.

問題 3.3.4. $\mathfrak{g}$ の Lie 括弧を $[\,,\,]_{\mathfrak{g}}$ で, 交換子を $[\,,\,]$ で表す．$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $(\sigma \otimes \tau)([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [(\sigma \otimes \tau)(X), (\sigma \otimes \tau)(Y)]$ を示せば良いが,

$$\begin{aligned}
(\sigma \otimes \tau)([X,Y]_{\mathfrak{g}}) &= \sigma([X,Y]_{\mathfrak{g}}) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \tau([X,Y]_{\mathfrak{g}}) \\
&\overset{(*1)}{=} [\sigma(X), \sigma(Y)] \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes [\tau(X), \tau(Y)] \\
&= \sigma(X)\sigma(Y) \otimes \mathrm{id}_W - \sigma(Y)\sigma(X) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \tau(X)\tau(Y) - \tau(X)\tau(Y) \otimes \mathrm{id}_V \\
&= \sigma(X)\sigma(Y) \otimes \mathrm{id}_W - \sigma(Y)\sigma(X) \otimes \mathrm{id}_W \\
&\quad + \big(\sigma(X) \otimes \tau(Y) - \sigma(X) \otimes \tau(Y) + \sigma(Y) \otimes \tau(X) - \sigma(Y) \otimes \tau(X)\big) \\
&\quad + \mathrm{id}_V \otimes \tau(X)\tau(Y) - \tau(X)\tau(Y) \otimes \mathrm{id}_V \\
&\overset{(*2)}{=} [\sigma(X) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \tau(X), \sigma(Y) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \tau(Y)] = [(\sigma \otimes \tau)(X), (\sigma \otimes \tau)(Y)]
\end{aligned}$$

なので証明できた．但し $(*1)$ は σ と τ が Lie 環の準同型であること, $(*2)$ は線形写像 f_1, f_2, g_1, g_2 に対して $(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2)$ であることから従う.

問題 3.3.5. 線形空間として $V \otimes F \simeq V$ となることは問題 3.3.2 で示した．表現 V に関する Lie 環の準同型を $\tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, 自明表現の準同型を $0 : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(F)$, $0(X) := 0$ と書くと, $V \otimes F$ の準同型は $(\tau\otimes 0)(X) = \tau(X)\otimes \mathrm{id}_F + \mathrm{id}_V \otimes O(X) = \tau(X)\otimes\mathrm{id}_F$ となる．あとは解答 3.3.2 の線形同型 $\iota : V\otimes F \xrightarrow{\sim} V$ の下で $\tau(X)\otimes\mathrm{id}_F \mapsto \tau(X)$ となるので, ι は Lie 環の表現の準同型である．よって主張が示せた.

4 SU(2) と SO(3) の表現

4.1 有限次元既約表現の分類 (問題: 44 ページ)

問題 4.1.1. 部分線形空間 $U \subset V$ に対する条件 $\tau \circ \mathrm{Ad}(g)(U) \subset U$ $(\forall g \in \mathrm{SO}(3))$ を考える．Ad は全射だから, この条件は任意の $h \in \mathrm{SU}(2)$ について $\rho(h)(U) \subset U$ となることと同値である．従って U が SU(2) の表現 $(\tau \circ \mathrm{Ad}, V)$ の不変部分空間であることと SO(3) の表現 (ρ, V) の不変部分空間であることは同値．これから結論が得られる．

問題 4.1.2. SU(2) の有限次元既約表現 ρ_m のうち $\rho_m(-I) = \mathrm{id}$ となるものを決定すれば良いが, (4.1.6) の

$$(\rho_m(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right])f)(x) = (bx+d)^m f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)$$

より $\rho_m(-I) = \mathrm{id} \iff m \in 2\mathbb{N}$ が従う．

4.2 不変積分 (問題: 46 ページ)

問題 4.2.1. 微分型式を使う． $x' = ax$, $y' = ay + bx$, $z' = cz$ と微分型式の線形性から $dx' = a\,dx$, $dy' = a\,dy + b\,dx$, $dz' = c\,dz$. あとは微分型式の反対称性 $dx \wedge dx = 0$ から

$$dx' \wedge dy' \wedge dz' \;=\; (a\,dx) \wedge (a\,dy + b\,dx) \wedge (c\,dz) \;=\; a^2 c\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

問題 4.2.2. $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^n \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ としすると $(Ag)_{jk} = \sum_{l=1}^m a_{jl} g_{lk}$ だから

$$\prod d(Ag)_{jk}$$

問題 4.2.3. $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SU}(2)$ とする．$\det g = 1$ より $ad - bc = 1$ だから, 条件 $A^* = A^{-1}$ は $\left[\begin{smallmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ と同値で, $d = \overline{a}$, $c = -\overline{b}$ を得る．よって $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right]$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

逆にこのような g が SU(2) の元であることは簡単に確認できる．

4.3 コンパクト群の不変積分と表現 (問題: 51 ページ)

問題 4.3.1. $A = [a_{jk}] \in \mathrm{U}(n)$ は $\sum_l a_{jl}\overline{a_{kl}} = \delta_{j,k}$ を満たすので, $|a_{jk}| \le \sum_k |a_{jk}| = 1$. よって $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ は有界である．閉集合であることは知っているので, U(n) はコンパクトである．

$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n) = \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ からこれらのコンパクト性も従う．

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\mathrm{diag}(r, 1, \ldots, 1/r) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ だから, $r \to \infty$ として $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ が非有界, つまりコンパクトでないことが分かる．$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ を部分集合に含む $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ もコンパクトではない．

問題 4.3.2. V の基底 $(v_j)_{j=1}^n$, $n := \dim V$ を取り, それに関する $f \in \mathrm{End}(V)$ の表現行列を $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^n$ として, $\mathrm{tr}_V f := \mathrm{tr}\,A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ と定める．これが基底の取り方によらないことを示そう．他の基底 $(w_j)_{j=1}^n$ に関する f の表現行列が B ならば, 正則行列 P が存在して $B = PAP^{-1}$ と書けるから, トレースの性質 $\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$ より $\mathrm{tr}\,B = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}\,A$. よって基底の取り方によらない．

5　球面調和関数

5.1　球関数 (問題: 55 ページ)

問題 5.1.1. 群準同型 $F : G \to \mathrm{Aut}(S)$ に対して $g.s; = F(g)(s)$ と定めれば, $g.(h.s) = F(g)(F(h)(s)) = \big(F(g)F(h)\big)(s) = F(gh)(s) = (gh).s$ 及び $e_G.s = F(e_G)(s) = \mathrm{id}(s) = s$ となる.

逆に写像 $(g, s) \mapsto g.s$ に対して $F : s \to s$ を $F(g)(s) := g.s$ で定めれば, $F(gh)(s) = (gh).s = g.(h.s) = F(g)(F(h)(s)) = F(g) \circ \big(F(h)\big)(s)$ より $F)gh) = F(g)F(h)$ となる. また $F(e_G)(s) = e_G.s = s = \mathrm{id}(s)$ より $F(e_G) = \mathrm{id}$ なので, $F(g)F(g^{-1} = F(gg^{-1}) = F(e_G) = \mathrm{id}$ となり, $F(g) \in \mathrm{Aut}(S)$ が分かる. 従って $F : G \to \mathrm{Aut}(S)$ は群準同型である.

問題 5.1.2. まず $gv \in S^2$ を示したいが, E^3 の Euclid 内積を $(\ ,\ )$ と書くと, $g \in \mathrm{SO}(3)$ なら ${}^T gg = I_3$ だから, $(gv, gv) = {}^T(gv)(gv) = {}^T v {}^T ggv = {}^T vv = (v, v) = 1$ となって示せた.

作用であることの証明は略す.

推移的であることを示すため, 任意に $v, w \in S^2$ を取る. v と w が線形従属なら $w = \pm v$ なので, $g = I_3$ または $\overrightarrow{0v}$ と直交する直線を軸とする角 π の回転を g とすれば $g.v = w$ となる. 線形独立なら $\overrightarrow{0v}$ と $\overrightarrow{0w}$ の張る平面と S^2 とが交わってできる大円を考え, 大円の弧上での v と w の中点 z を取り, $\overrightarrow{oz}$ を軸とする角 π の回転を g とすればよい.

問題 5.1.3. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^3 \in \mathrm{SO}(3)$, $e_3 := {}^T(0,0,1)$ とすると, $Ae_3 = e_3 \iff (a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0,0,1)$. よって 2 次行列 B を用いて $A = \left[\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ と書ける. すると $A \in \mathrm{SO}(3) \iff {}^T AA = I_3 \iff {}^T BB = I_2 \iff B \in \mathrm{SO}(2)$ となり, SO(2) の記述 (補題 2.1.8) より結論が得られる.

5.2　球面調和関数 (問題: 63 ページ)

問題 5.2.1. $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$, $\overline{c} := \cos\phi$, $\overline{s} := \sin\phi$ と略記する. Leibniz 則を使って $(dT)(A_1)$ と $(dT)(A_2)$ の合成を計算すると

$$
\begin{aligned}
(dT)(A_1) \circ (dT)(A_2) &= \big(\overline{s}\partial_\theta + (c/s)\overline{c}\partial_\phi\big)\big(-\overline{c}\partial_\theta + (c/s)\overline{s}\partial_\phi\big) \\
&= -\overline{cs}\partial_\theta^2 + \big((c/s)\overline{s}^2\partial_\theta\partial_\phi - (1/s^2)\overline{s}^2\partial_\phi\big) \\
&\quad + \big(-(c/s)\overline{c}^2\partial_\theta\partial_\phi + (c/s)\overline{cs}\partial_\phi\big) + \big((c/s)^2\overline{cs}\partial_\phi^2 + (c/s)^2\overline{c}^2\partial_\phi\big), \\
(dT)(A_2) \circ (dT)(A_1) &= \big(-\overline{c}\partial_\theta + (c/s)\overline{s}\partial_\phi\big)\big(\overline{s}\partial_\theta + (c/s)\overline{c}\partial_\phi\big) \\
&= -\overline{cs}\partial_\theta^2 + \big(-(c/s)\overline{c}^2\partial_\theta\partial_\phi + (1/s^2)\overline{c}^2\partial_\phi\big) \\
&\quad + \big((c/s)\overline{s}^2\partial_\theta\partial_\phi + (c/s)\overline{cs}\partial_\phi\big) + \big((c/s)^2\overline{cs}\partial_\phi^2 - (c/s)^2\overline{s}^2\partial_\phi\big).
\end{aligned}
$$

よって

$$
[(dT)(A_1), (dT)(A_2)] = \big((c/s)\partial_\theta\partial_\phi - (1/s^2)\partial_\phi\big) - (c/s)\partial_\phi\partial_\theta + (c/s)^2\partial_\phi = -\partial_\phi = (dT)(A_3).
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
[(dT)(A_2), (dT)(A_3)] &= \big(\overline{c}\partial_\theta\partial_\phi - (c/s)\overline{s}\partial_\phi^2\big) - \big(\overline{c}\partial_\theta\partial_\phi - \overline{s}\partial_\theta - (c/s)\overline{s}\partial_\phi^2 - (c/s)\overline{s}\partial_\phi\big) \\
&= \overline{s}\partial_\theta + (c/s)\overline{c}\partial_\phi = (dT)(A_1), \\
[(dT)(A_3), (dT)(A_1)] &= \big(-\overline{s}\partial_\theta\partial_\phi - \overline{c}\partial_\theta - (c/s)\overline{c}\partial_\phi^2 + (c/s)\overline{s}\partial_\phi\big) - \big(-\overline{s}\partial_\theta\partial_\phi - (c/s)\overline{c}\partial_\phi^2\big) \\
&= -\overline{c}\partial_\theta + (c/s)\overline{s}\partial_\phi = (dT)(A_2).
\end{aligned}
$$

問題 5.2.2. Leibniz 則 $(fg)' = f'g + fg'$ を繰り返し使うと, m 回微分は $(fg)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} f^{(j)} g^{(m-j)}$ となる. 従って

$$\begin{aligned}(xP_l')^{(m-1)} &= xP_l^{(m)} + (m-1)P_l^{(m-1)},\\ \big((1-x^2)P_l''\big)^{(m-1)} &= (1-x^2)P_l^{(m+1)} - 2(m-1)xP_l^{(m)} - 2\binom{m}{2}P_l^{(m-1)}\end{aligned}$$

となるので, P_l の微分方程式 $(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0$ から

$$\begin{aligned}&(1-x^2)P_l^{(m+1)} - \big(2(m-1)x + 2\big)P_l^{(m)} + \left(l(l+1) - 2(m-1) - 2\binom{m}{2}\right)P_l^{(m-1)} = 0\\ \Longleftrightarrow\ &(1-x^2)P_l^{(m+1)} - 2mP_l^{(m)} + \big(l(l+1) - m(m-1)\big)P_l^{(m-1)} = 0\end{aligned}$$

となる. $l(l+1) - m(m-1) = (l+m)(l-m+1)$ より結論を得る.

問題 5.2.3. Legendre 多項式 $P_l(x)$ の母関数

$$\sum_{l\geq 0} P_l(x)t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{5.2.1}$$

から

$$\sum_{k\geq 0} P_k(x)t^k \sum_{l\geq 0} P_l(x)t^l = \frac{1}{1-2xt+t^2}.$$

両辺を $x \in (-1,1)$ で積分すると, 左辺については直交関係から

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k\geq 0} P_k(x)t^k \sum_{l\geq 0} P_l(x)t^l\, dx = \sum_{l\geq 0} t^{2l} \int_{-1}^{1} P_l(x)^2\, dx.$$

右辺については

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2} = \left[-\frac{1}{2t}\log(1-2xt+t^2)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{t}\log\frac{1+t}{1-t} = 2\sum_{l\geq 0}\frac{t^{2l}}{2l+1}.$$

よって t^{2l} の係数を比較して結論が得られる.

(5.2.1) は以下のように証明できる. $\frac{d^l}{dx^l}x^{2(l-k)} = \frac{(2l-2k)!}{(k-2l)!}x^{l-2k}$ から

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^l = \frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2\rfloor}\frac{(-1)^k(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}.$$

最後の $\lfloor l/2\rfloor$ は $l/2$ を超えない最大の整数. 一方で一般二項定理 $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$, $\binom{\alpha}{n} := \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-2xt+t^2)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2xt-t^2)^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(2xt)^{n-m}(-t^2)^m = \sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(2n)!}{2^{n+m}n!m!(n-m)!}x^{n-m}t^{n+m}\\ &= \sum_{l\geq 0}t^l\sum_{k=0}^{\lfloor l/2\rfloor}\frac{(-1)^k(2l-2k)!}{2^l(l-k)!k!(l-2k)!}x^{l-2k}.\end{aligned}$$

最後で添字の置き換え $(l,k) := (n+m,m)$ を行った. t^l の係数が一致するので, (5.2.1) が成立することが従う.

7　レポート問題の解答

レポート問題 1 (問題: 13 ページ)**.** $d := \frac{d}{dx}$ と略記する.

(1) まず Leibniz 則から任意の (十分な回数微分可能な) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$d^k\big(f(x)g(x)\big) \;=\; \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(k-j)}g^{(j)}(x)$$

となることに注意する. 但し $\binom{a}{j} := a(a-1)\cdots(a-j+1)/j!$ は (一般) 二項係数. すると

$$\begin{aligned} Q_k^p(x) \;&=\; e^x x^{-p} d^k(e^{-x}x^{k+p}) \;=\; e^x x^{-p}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d^j(e^{-x})\cdot d^{k-j}(x^{k+p}) \\ &=\; e^x x^{-p}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j e^{-x}\cdot(k+p)_{k-j}\,x^{p+j} \;=\; \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}\,x^j. \end{aligned} \tag{7.0.1}$$

但し $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $(a)_m := a(a-1)\cdots(a-m+1)$ とし, また $(a)_0 := 1$ とした. これを微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} &\big(xd^2-(x-p-1)+k+1\big)Q_k^p(x) \;=\; x\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}j(j-1)x^{j-2} \\ &\quad+(p+1-x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}jx^{j-1}+k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}x^j \\ &=\; \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}\big(j(j-1)+(p+1)j\big)x^{j-1}+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}(k-j)x^j \\ &=\; \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^k(k+p)_{k-j}x^j\left(\binom{k}{j}(k-j)-\binom{k}{j+1}\right) \;=\; 0. \end{aligned}$$

(2) $Q_k^p(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ と書くと (7.0.1) から $b_j = (-1)^j\binom{k}{j}(k+p)_{k-j}$. ここで $k = n-l-1 = 1/\kappa-l-1$ に注意すると

$$\frac{b_{j+1}x^{j+1}}{b_j x^j} \;=\; -\frac{x(k+p)_{k-j-1}}{(k+p)_{k-j}}\frac{\binom{k}{j+1}}{\binom{k}{j}} \;=\; -\frac{2\kappa r}{j+p+1}\frac{k-j}{j+1} \;=\; r\frac{2\kappa(j+l+1-1/\kappa)}{(j+1)(j+2l+2)} \;=\; \frac{a_{j+1}r^{j+1}}{a_j r^j}.$$

但し a_j は補題 1.3.2 の $\Lambda_{k,l}(r) = \sum_{j=0}^{k} a_j r^j$ の係数. よって $Q_k^p(x) = Q_k^{2l+1}(2r/(k+l+1))$ と $\Lambda_{k,l}(r)$ は定数倍を除いて一致する.

(3) 積分を I で表す. j と k に関する対称性から $j \le k$ と仮定して良い. $Q_j^p(x)$ の方だけ定義を使って書き直し, 更に部分積分を繰り返し使うと

$$I \;=\; \int_0^\infty e^{-x}x^p Q_j^p(x)Q_k^p(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty Q_k^p(x)d^j(e^{-x}x^{j+p})\,dx \;=\; (-1)^j\int_0^\infty e^{-x}x^{j+p}d^jQ_k^p(x)\,dx.$$

$j > k$ ならば $Q_k^p(x)$ が k 次多項式であることから $d^jQ_k^p(x) = 0$ となり $I = 0$. $j = k$ ならば (7.0.1) から

$$I \;=\; (-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{k+p}\cdot k!\big[Q_k^p(x)\text{ の }k\text{ 次係数}\big]\,dx \;=\; (-1)^k(k+p)!\cdot k!(-1)^k \;=\; k!(k+p)!.$$

レポート問題 2 (問題: 27 ページ). (1) と (2) は考えている集合が線形空間であること, 交換子が双線形写像であることを忘れずに確認しておくこと.

(1) 明らかに $\mathrm{End}(V)$ は線形空間で, 交換子は双線形写像である. 交換子の反対称性も明らか. Jacobi 律は $[f,[g,h]] = f(gh-hg)-(gh-hg)f = fgh-fhg-ghf+hgf$ から $[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]] = (fgh-fhg-ghf+hgf)+(ghf-gfh-hfg+fhg)+(hfg-hgf-fgh+gfh) = 0$ となって成立する.

(2) 複素正方行列 X は, 実線形空間 $V=\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ 上の線形写像 f の標準基底 (を実部と虚部に分けたもの) に関する表現行列とみなせる. この対応 $X\mapsto f$ は線形同型 $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$ を定め, それでもって (1) の交換子 $[f,g]=fg-gf$ は行列の交換子 $[X,Y]=XY-YX$ に対応する. 従って (1) から $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ は実 Lie 環であることが分かる.

(3) $\mathfrak{u}(n)$ について. まず $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の実部分線形空間であることは明らか. また $X,Y\in\mathfrak{u}(n)$ に対して $[X,Y]^* = (XY-YX)^* = Y^*X^*-X^*Y^* = (-Y)(-X)-(-X)(-Y) = YX-XY = -[X,Y]$ より $[X,Y]\in\mathfrak{u}(n)$ となる. 従って $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の部分 Lie 環である.
次に $\mathfrak{su}(n)$ について. これは $\mathfrak{u}(n)$ の実部分線形空間なので, 特に $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の実部分線形空間である. また $X,Y\in\mathfrak{su}(n)$ に対して, $X,Y\in\mathfrak{u}(n)$ だから $[X,Y]\in\mathfrak{u}(n)$ であり, また $\mathrm{tr}[X,Y] = \mathrm{tr}\,XY-\mathrm{tr}\,YX = 0$ より $[X,Y]\in\mathfrak{su}(n)$. 従って $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ の部分 Lie 環である.

レポート問題 3 (問題: 39 ページ). 答えは二つ. 行列式を取ることで定まる写像 $\det : \mathrm{O}(n)\to\mathbb{R}$ を考える. 問題 2.1.7 より $\det(\mathrm{O}(n)) = \{\pm 1\}$ で, $A := \det^{-1}(1) = \mathrm{SO}(n)$ と $B := \det^{-1}(-1)$ はどちらも空ではなく, $A\cup B = \mathrm{O}(n)$ 及び $A\cap B=\emptyset$ を満たす. また行列式は行列の成分の多項式だから, $\det$ は連続写像であり, A と B は共に閉集合. すると $A = \mathrm{O}(n)\setminus B$, $B=\mathrm{O}(n)\setminus A$ から A と B は共に開集合. 以上より $\mathrm{O}(n)$ の連結成分は A と B の二つである. (A と B がそれぞれ弧状連結であることを, 実標準形を使って示しても良い.)

レポート問題 4 (問題: 52 ページ). $G=\mathrm{SU}(2)$ の対角行列のなす部分群が H であった.

(1) ユニタリ行列 g は正規行列なのでユニタリ行列 u で対角化できる. $g\in\mathrm{SU}(2)$ なら更に $\det g = 1$ なので, 対角行列 $h := ugu^{-1}$ も $\det h = 1$ を満たす. h は二次行列なので $h = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a\end{smallmatrix}\right]\in H$, $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ と書ける. $uu^*=I$ から $|\det u| = 1$ となることに注意して, $\det u = e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$ と置く. $k := e^{-i\theta/2}u$ とすれば, $kk^* = uu^* = I$ かつ $\det k = 1$ なので $k\in\mathrm{SU}(2)$ であり, また $khk^{-1} = uhu^{-1} = g$ となる.

(2) $\mathrm{SU}(2)$ の既約表現 ρ_m は, m 次以下の多項式 $f(x)$ に対して

$$\mathrm{SU}(2)\ni g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \longmapsto \rho_m(g), \quad (\rho_m(g)f)(x) := (bx+d)^m f\Big(\frac{ax+c}{bx+d}\Big)$$

で与えられる. $f_k = x^k$ への $h = \left[\begin{smallmatrix} a & \\ & 1/a\end{smallmatrix}\right]$ の作用は, 上式で $b=c=0$, $d=a^{-1}$, $f(x)=x^k$ として

$$\rho_m(h)f_k = (a^{-1})^m(ax/a^{-1})^k = a^{2k-m}x^k = a^{2k-m}f_k.$$

(3) m 次以下の多項式のなす線形空間を V_m と書くと, $f_k = x^k$ $(k=0,1,\dots,m)$ は V_m の基底をなす. (2) よりこの基底に関する $\rho_m(h)$ の表現行列は対角行列 $\mathrm{diag}(a^{-m},a^{-m+2},\dots,a^m)$ である. よって指標の定義から

$$\chi_m(h) = \mathrm{tr}_{V_m}\rho_m(h) = \sum_{k=0}^m a^{2k-m} = \frac{a^{m+1}-a^{-m-1}}{a-a^{-1}}.$$

レポート問題 5 (問題: 64 ページ)**.** (演習問題 1.3.1 の解答で $r=1$ としたもの.) 簡単のため $c := \cos\theta$, $s := \sin\theta$, $\bar{c} := \cos\phi$, $\bar{s} := \sin\phi$ と略記する．また $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ 等と略記する．まず連鎖律

$$\partial_x \;=\; \theta_x\partial_\theta + \phi_x\partial_\phi$$

に注意して, $\theta_x = \frac{\partial\theta}{\partial x}$ と $\phi_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ を決定して ∂_x を書き換える．$\tan\theta = \sqrt{x^2+y^2}/z$ の両辺を x で微分すると $\theta_x/c^2 = x/(z\sqrt{x^2+y^2}) = \bar{c}/c$ なので $\theta_x = c\bar{c}$. 同様に $\tan\phi = y/x$ から $\phi_x/\bar{c}^2 = -y/x^2 = -\bar{s}/(s\bar{c}^2)$ となるので $\phi_x = -\bar{s}/s$. 従って

$$\partial_x \;=\; c\bar{c}\partial_\theta - s^{-1}\bar{s}\partial_\phi.$$

同様に ∂_y を計算すると, $\theta_y/c^2 = y/(z\sqrt{x^2+y^2}) = \bar{s}/c$ から $\theta_y = c\bar{s}$, $\phi_y/\bar{c}^2 = 1/x = 1/(s\bar{c})$ から $\phi_y = \bar{c}/s$ となるので

$$\partial_y \;=\; \theta_y\partial_\theta + \phi_y\partial_\phi \;=\; c\bar{s}\partial_\theta + s^{-1}\bar{c}\partial_\phi.$$

∂_z については, $\theta_z/c^2 = -\sqrt{x^2+y^2}/z^2 = -s/c^2$ から $\theta_z = -s$ となり, また $\phi_z = 0$ だから

$$\partial_z \;=\; \theta_z\partial_\theta + \phi_z\partial_\phi \;=\; -c\bar{s}\partial_\theta.$$

以上のようにように一つ一つ計算しても良いが, 連鎖律を

$$\begin{bmatrix}\partial_r\\ \partial_\theta\\ \partial_\phi\end{bmatrix} \;=\; A\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}, \quad A \;:=\; \begin{bmatrix}\partial_r x & \partial_r y & \partial_r z\\ \partial_\theta x & \partial_\theta y & \partial_\theta z\\ \partial_\phi x & \partial_\phi y & \partial_\phi z\end{bmatrix}$$

とまとめて書けば, 逆行列 A^{-1} を計算すれば結論が得られることが分かる.

参考文献

[山杉] 山内恭彦, 杉浦光夫 **連続群論入門**, 新数学シリーズ 18, 培風館 (1960).

以上です.