2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　12 月 20 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

10　三位一体

今回扱う三位一体とは, (代数) **幾何**学的な対象である代数曲線が, (複素) **解析**的な対象である Riemann 面, および**代数**的な対象である代数函数体と 1 対 1 に対応する, という主張である.

以下, Riemann 面といったら 1 次元複素多様体のこととする.

10.1　主張

三位一体の正確な主張は次の通り.

定理 10.1.1. 次の 3 つの圏は同値である.

(i) **非特異射影曲線**の圏 $(\mathcal{C}urve)$. 対象は $\mathbb{C}$ 上の非特異完備代数曲線 C. 射は $\mathbb{C}$ 上のスキームの射 $C \to C'$.

(ii) **閉 Riemann 面**の圏 $(\mathcal{R}iemann)$. 対象はコンパクト 1 次元複素多様体 R. 射は複素多様体の正則写像 $R \to R'$.

(iii) **1 変数代数函数体**の圏 $(\mathcal{F}uction)$. 対象は 1 変数有理函数体 $\mathbb{C}(x)$ の有限次元拡大体 K. 射は $\mathbb{C}$ 代数としての準同型 $K \to K'$.

このうち圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}iemann)$ は §8 で考えたものである.

命題 10.1.2. $\mathbb{C}$ 上有限型スキーム X に付随する複素解析空間 X_h を対応させる函手 $X \mapsto X_h$ が定理 10.1.1 の圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}iemann)$ を与える.

圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}uction)$ は有理函数体を考えることで得られる.

命題 10.1.3. $\mathbb{C}$ 上の整スキーム X にその有理函数体 $K(X)$ を対応させる函手 $X \mapsto K(X)$ が定理 10.1.1 の圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}uction)$ を与える.

命題 10.1.3 の証明は [H77, Chap.I, §6] を参照[*2]せよ.

その他の圏同値も明確に与えることができる. その説明に必要な概念の導入から始めよう.

定義. Riemann 面 R の**有理型函数** (meromorphic function) f とは複素多様体の正則写像 $f : R \to \mathbb{CP}^1$ のことである. Riemann 面 R の有理型函数全体のなす体を R の**有理型函数体**と呼ぶ.

命題 10.1.4. Riemann 面 R にその有理型函数体を対応させる函手が圏同値 $(\mathcal{R}iemann) \to (\mathcal{F}uction)$ を与える.

[*1] 2018/12/20 版, ver. 0.2.

[*2] 正確には, [H77, Chap.I, §6] で扱っている圏同値はスキームとしての曲線の圏 $(\mathcal{C}urve)$ からの函手ではなく, $(\mathcal{C}urve)$ と同値な ([H77, Chap.I] の意味での) 代数多様体としての曲線の圏から函手です.

命題 10.1.4 の証明は [今15, 第 4 章] を参照せよ.

次に付値に関する概念をいくつか用意しておく. 体 K に対して $K^* := K \setminus \{0\}$ と記す.

定義. K を体とし, $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を K の離散付値とする.

(1) $\nu(K^*) = \{0\}$ のとき ν を自明な付値と呼ぶ.
(2) $\nu(a) = 1$ となる $a \in K$ が存在するような ν を正規離散付値と呼ぶ.

ν を体 K の非自明な離散付値とすると, $\nu(K^*)$ は $\mathbb{Z}$ の部分加群だから, $\nu(K^*) = r\mathbb{Z}$ となる $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ が一意に存在する. そこで

定義. K を体とし, K の離散付値を考える.

(1) 非自明な離散付値 ν に対し, $\nu(K^*) = r\mathbb{Z}$ となる $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ を用いて, 正規離散付値 $\overline{\nu}$ を $\overline{\nu}(a) := \nu(a)/r$ で定義する.
(2) 非自明な離散付値の同値関係 $\sim$ を $\nu_1 \sim \nu_2 \overset{\text{def}}{\iff} \overline{\nu}_1 = \overline{\nu}_2$ で定める.
(3) 非自明な離散付値の $\sim$ による同値類を K の**素点** (place) と呼ぶ.

命題 10.1.5. 1 変数代数函数体 K にその素点の集合を対応させる函手が圏同値 $(\mathcal{F}uction) \to (\mathcal{R}iemann)$ を与える.

命題 10.1.5 の証明も [今15, 第 4 章] を参照せよ.

この副節の最後として, 種数を三位一体を通じて扱う. この講義では曲線の種数を $(\mathcal{C}urve)$ で定義したが, 同値な圏である $(\mathcal{R}iemann)$ や $(\mathcal{F}uction)$ で種数を捉えると次のようになる.

命題 10.1.6. C を $\mathbb{C}$ 上の非特異完備曲線とし, 定理 10.1.1 で C に対応する Riemann 面を R, 代数函数体を K とする. C の種数 $g := \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C)$ について

$$g \;=\; \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C) \;=\; \dim_{\mathbb{C}}\{R \text{ 上の正則 1 次微分形式 }\} \;=\; \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{K/\mathbb{C}}.$$

Riemann 面の場合に種数を書き直すと次のようになる.

命題. 閉 Riemann 面 R について,

$$g \;=\; \dim_{\mathbb{C}}\{R \text{ 上の正則 1 次微分形式 }\} \;=\; \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} H^1_{\mathrm{dR}}(R, \mathbb{C}) \;=\; \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} H^1(R, \mathbb{C}) \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{rank} H_1(R, \mathbb{Z}).$$

但し $H^*_{\mathrm{dR}}(-, \mathbb{C})$ は多様体の de Rham コホモロジーを表す.

証明. 最初の等号は命題 10.1.6 による. 2 番目の等号は Hodge 分解

$$H^1(X, \mathbb{C}) \;\simeq\; \{R \text{ 上の調和形式 }\} \;=\; \{R \text{ 上の正則微分形式 }\} \oplus \{R \text{ 上の反正則微分形式 }\}$$

から従う. 3 番目の等号は de Rham の定理 $H^1_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \mathbb{C})$ から従う. 最後の等号はコホモロジーの定義 $H^1(X, \mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$ から従う. □

Hodge 分解については, 例えば [小05, 6 章] を参照せよ.

問題 10.1 $(****)$**.** 命題 10.1.3, 10.1.4, 10.1.5 の証明を解説せよ.

10.2　種数が小さい場合の三位一体

前副節の対応を種数 $g = 0, 1$ の場合に具体的に見てみよう．引き続き記号 C, R, K を用いる．

命題 10.2.1. $g = 0$ の場合の三位一体は

$$C \;=\; \text{射影直線}\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \quad R \;=\; \text{Riemann 球面}\ \mathbb{CP}^1, \quad K \;=\; \mathbb{C}(x)$$

となり, $g = 1$ の場合は

$$C \;=\; \text{楕円曲線}, \quad R \;=\; 1\ \text{次元複素トーラス}, \quad K \;=\; \mathbb{C}(x, \sqrt{f(x)}),\ f\ \text{は重根を持たない}\ 3\ \text{次多項式}$$

となる．

証明. $g = 1$ の場合を示そう．まず Riemann 面 R から始めると, 1 次元複素トーラスは

$$R \;=\; \mathbb{C}/L, \quad L \;=\; \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}, \quad \operatorname{Im}\omega > 0$$

と書ける．ここで **Weierstrass の $\wp$ 函数**

$$\wp(z) \;:=\; \frac{1}{z^2} + \sum_{p \in L\setminus\{0\}} \Big(\frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2}\Big)$$

を思い出して, 写像

$$\mathbb{C}/L \longrightarrow \mathbb{CP}^2, \quad z \longmapsto \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)] & z \notin L \\ [0 : 0 : 1] & z \in L \end{cases}$$

とする．すると, $\wp$ 函数が微分方程式

$$\big(\wp'(z)\big)^2 \;=\; 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad g_2 \;:=\; 60 \sum_{p \in L\setminus\{0\}} p^{-4},\ g_3 \;:=\; 140 \sum_{p \in L\setminus\{0\}} p^{-6} \tag{10.1}$$

を満たすことから, 上の写像 $\mathbb{C}/L \to \mathbb{CP}^2$ の像は 3 次斉次式

$$F(X, Y, Z) \;:=\; XZ^2 - 4Y^3 - g_2X^2Y - g_3X^3$$

の零点 $\{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}$, つまり F が定める平面曲線で与えられることがわかる．C はこの平面曲線に対応した非特異完備代数曲線である．

また, R の有理型函数体 K は $\wp$ と $\wp'$ で生成されるが, (10.1) より $\wp' = \sqrt{f(\wp)}$, $f(x) := 4x^3 - g_2x - g_3$ なので, $K = \mathbb{C}(x, \sqrt{f(x)})$ と書ける．更に $f(x)$ は重根を持たない．以上で $g = 1$ の場合の三位一体が確認できた． □

問題 10.2 (∗∗)**.** Weierstrass の $\wp$ 函数の微分方程式 (10.1) を導け．また $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ が重根を持たないことを示せ．

10.3　Picard 多様体

最後に曲線の Picard 多様体を記述しておこう．§9.3 の記号を用いる．特に, $\mathbb{C}$ 上の射影多様体 X に付随する複素解析空間を X_h と書く．命題 9.3.2 の完全列を $\dim X = 1$ の場合に適用すれば

$$0 \longrightarrow H^1(X_h, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \operatorname{Pic} X \longrightarrow H^2(X_h, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \tag{10.2}$$

C を $\mathbb{C}$ 上の非特異代数曲線とし, その種数を g と書く．このとき, 命題 10.1.2 より C_h は種数 g の閉 Riemann 面である．従って C_h は向き付けられたコンパクトな 2 次元実多様体で, 球面に g 個のハンドルをつけたものと同相である．よって

$$H^0(C_h, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H^1(C_h, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}, \quad H^2(C_h, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

また種数の定義から

$$H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq \mathbb{C}^g.$$

従って完全列 (10.2) は $0 \to \mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{C}^g \to \operatorname{Pic} C \to \mathbb{Z} \to 0$ となる．以上より

命題 10.3.1. $\mathbb{C}$ 上の非特異代数曲線 C の Picard 多様体は, 種数を g として,

$$\operatorname{Pic}^0(C) := H^1(C, \mathcal{O}_C)/H^1(C_h, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}.$$

参考文献

[H77]　R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[小05]　小林昭七, **複素幾何**, 岩波書店, 2005.

[今15]　今野一宏, **リーマン面と代数曲線**, 共立講座 数学の輝き 2, 共立出版, 2015.

以上です．