2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 30 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

10　テータ関数 2

問題 10.1. $\vartheta_3(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i\tau n^2 + 2inz)$ と書き直しておく。有界領域で絶対一様収束しているので項別微分できて

$$\frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial z^2} = -4\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \exp(n^2\pi i\tau + 2niz) = -\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau}.$$

$\vartheta_1(z|\tau), \vartheta_2(z|\tau), \vartheta_4(z|\tau)$ は z をシフトしただけなので同じ微分方程式を満たす。

問題 10.2. (1) 無限積公式を

$$\vartheta_3(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}) = G\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1}e^{2iz})(1+q^{2n-1}e^{-2iz})$$

と書き直してから対数微分すると

$$(\log\vartheta_3(z))' = \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n-1}(e^{2iz}-e^{-2iz})}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})(1+q^{2n-1}e^{-2iz})} = \sum_{n\geq 1}\Big[\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}} - \frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\Big].$$

これから (10.2) が従う。
(2) もう一度 (10.2) を微分すれば (10.3) の第 1 項は直ちに導かれる。第 2 項は次の計算から従う。

$$\frac{d}{dz}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}} = \frac{d}{dz}\Big(2i - \frac{2i}{1+q^{2n-1}e^{2iz}}\Big) = \frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2}.$$

(3) $\phi(z) = 2Gq^{1/4}\prod_{n\geq 1}(1-2q^{2n}\cos 2z + q^{4n})$ を対数微分すると

$$(\log\phi(z))' = \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n}(e^{-2iz}-e^{2iz})}{(1-q^{2n}e^{2iz})(1-q^{2n}e^{-2iz})} = \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n}e^{-2iz}}{1-q^{2n}e^{-2iz}} - \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n}e^{2iz}}{1-q^{2n}e^{2iz}}.$$

これから

$$\phi''(z) = \phi'(z)\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n}e^{-2iz}}{1-q^{2n}e^{-2iz}} - \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n}e^{2iz}}{1-q^{2n}e^{2iz}}\Big] - \phi(z)\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{(2i)^2q^{2n}e^{-2iz}}{(1-q^{2n}e^{-2iz})^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(2i)^2q^{2n}e^{2iz}}{(1-q^{2n}e^{2iz})^2}\Big]$$

となる。これらの式で $z\to 0$ とすれば結論が出る。
(4) 簡単なので省略する。

問題 10.3. $|q|<1$ よりどの無限積も絶対収束しているので積の順番は交換できる。右辺の積の順番を交換すると

$$\Big[\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})\Big]\cdot\Big[\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n})\Big] = \prod_{n\geq 1}(1-q^n)\prod_{n\geq 1}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{2n}(1-q^{2n}).$$

問題 10.4. (1) $\vartheta_3(z+\pi,q) = \vartheta_3(z,q)$ 及び $\vartheta_3(z+\pi\tau,q) = q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_3(z,q)$ から従う。
(2) $\vartheta_4(z) = \vartheta_3(z-\pi/2)$ より

$$\begin{aligned}A\vartheta_4(z|\tau) &= \exp(i\tau'(z-\pi/2)^2/\pi)\vartheta_3(\tau^{-1}(z-\pi/2)|\tau') \\ &= \exp(i\tau' z^2)\exp(-i\tau' z + i\pi\tau'/4)\vartheta_3(\tau^{-1}z + \pi\tau'/2|\tau').\end{aligned}$$

[*1] 2017/06/28 版, ver. 0.1.

ここで $\vartheta_2(z|\tau) = e^{iz+i\pi\tau/4}\vartheta_3(z+\pi\tau/2|\tau)$ から

$$\vartheta_2(\tau^{-1}z|\tau') = e^{i\tau z+i\pi\tau'/4}\vartheta_3(\tau^{-1}z+\pi\tau'/2|\tau').$$

あとは $\vartheta_2(z)$ が偶関数なので最初の等式 $A\vartheta_4(z|\tau) = e^{i\tau' z^2/\pi}\vartheta_2(z/\tau|\tau') = e^{i\tau' z^2/\pi}\vartheta_2(\tau' z|\tau')$ が得られる。

次に $\vartheta_2(z|\tau) = e^{iz+i\pi\tau/4}\vartheta_3(z+\pi\tau/2|\tau)$ から

$$\begin{aligned} A\vartheta_2(z|\tau) &= e^{iz+i\pi\tau/4}\exp\bigl(i\tau'(z+\pi\tau/2)^2/\pi\bigr)\vartheta_3\bigl(\tau'(z+\pi\tau/2)|\tau'\bigr) \\ &= \exp(i\tau' z^2/\pi)\vartheta_3(\tau' z-\pi/2|\tau') \end{aligned}$$

となるので、$\vartheta_4(z) = \vartheta_3(z-\pi/2)$ から 2 番目の等式を得る。

最後に $\vartheta_1(z|\tau) = -ie^{iz+i\pi\tau/4}\vartheta_3(z-\pi/2+\pi\tau/2|\tau)$ から

$$\begin{aligned} A\vartheta_1(z|\tau) &= -i\exp(iz+i\pi\tau/4)\exp\bigl(i\tau'(z-\pi/2+\pi\tau/2)^2/\pi\bigr)\vartheta_3\bigl(\tau'(z-\pi/2+\pi\tau/2)|\tau'\bigr) \\ &= -i\exp(i\tau' z^2/\pi)\exp(-i\tau' z+i\pi/2+i\pi\tau'/4)\vartheta_3(\tau' z-\pi/2-\pi\tau'/2|\tau') \\ &= \exp(i\tau' z^2/\pi)\exp(i\pi/2)\vartheta_1(-\tau' z|\tau') \end{aligned}$$

となるので、$\vartheta_1(z)$ が奇関数であることから 3 番目の等式も得られる。

連絡事項

次回からグループ学習及び発表です。

以上です。