2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 30 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

10　テータ関数 2

引き続き τ を虚部が正の複素数とし $q := \exp(i\pi\tau)$ とする。テータ関数 $\vartheta_k(z) = \vartheta_k(z,q)$ の定義を思い出すと

$$\begin{aligned}
&\vartheta_4(z,q) := \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2niz},\\
&\vartheta_1(z,q) := -ie^{iz+i\pi\tau/4}\vartheta_4(z+\pi\tau/2,q) = -i\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz},\\
&\vartheta_2(z,q) := \vartheta_1(z+\pi/2,q) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz},\\
&\vartheta_3(z,q) := \vartheta_4(z+\pi/2,q) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz}.
\end{aligned} \tag{10.1}$$

10.1　テータ関数の満たす微分方程式 [Whittaker-Watson §21.4]

定理. $\vartheta_3(z|\tau) := \vartheta_3(z,q)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\Big(\frac{i\pi}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}\Big)\vartheta_3(z|\tau) = 0.$$

また $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4$ も同じ微分方程式を満たす。

問題 10.1 (*)**.** この定理を示せ。

10.1.1　テータ関数の 0 での値の関係式 [§21.41]

定理. $\vartheta_k := \vartheta_k(0,q)$, $\vartheta'_k := \frac{\partial \vartheta_k}{\partial z}(0,q)$ と略記すると

$$\vartheta'_1 = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4.$$

証明. テータ関数が広義一様収束することは知っているから、前回のレポート問題の無限積表示

$$\vartheta_3(z) = G\prod_{n\geq 1}(1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

の対数を項別微分できる。すると

$$\vartheta'_3(z) = \vartheta_3(z)\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\Big] \tag{10.2}$$

を得る。もう一度項別微分すると

$$\begin{aligned}
\vartheta''_3(z) =&\vartheta'_3(z)\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n\geq 1}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\Big]\\
&+\vartheta_3(z)\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{-2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{-2iz})^2}\Big].
\end{aligned} \tag{10.3}$$

$z \to 0$ として

$$\vartheta'_3(0) = 0, \quad \vartheta''_3(0) = -8\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

[*1] 2017/06/27 版, ver. 0.2.

同様に

$$\vartheta_4'(0)=0,\quad \vartheta_4''(0)=8\vartheta_4(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}$$
$$\vartheta_2'(0)=0,\quad \vartheta_2''(0)=8\vartheta_2(0)\Big[-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}\Big].$$

一方 $\vartheta_1(z)=\phi(z)\sin z$ と書くと

$$\phi'(0)=0,\quad \phi''(0)=8\phi(0)\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}. \tag{10.4}$$

従って

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{3\phi''(0)-\phi(0)}{\phi(0)}=-1+24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

以上より

$$\begin{aligned}1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}&=8\Big[-\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}-\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\Big]\\&=8\Big[-\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\Big]\\&=24\sum_{n\geq 1}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

前節の微分方程式を用いてこの等式を書き直すと

$$\frac{1}{\vartheta_1(0|\tau)}\frac{d\vartheta_1'(0|\tau)}{d\tau}=\frac{1}{\vartheta_2(0|\tau)}\frac{d\vartheta_2(0|\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_3(0|\tau)}\frac{d\vartheta_3(0|\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_4(0|\tau)}\frac{d\vartheta_4(0|\tau)}{d\tau}.$$

τ で積分して

$$\vartheta_1'(0,q)=C\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\vartheta_4(0,q).$$

積分定数 C は $q\to 0$ の極限から決まる。実際、級数による定義 (10.1) から

$$\lim_{q\to 0}q^{1/4}\vartheta_1'=2,\quad \lim_{q\to 0}q^{-1/4}\vartheta_2=2,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_3=1,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_4=1$$

となり、これらから $C=1$ と分かる。以上で結論が得られた。 □

問題 10.2 $(*)$**.** (1) 等式 (10.2) を確認せよ。

(2) 等式 (10.3) を (10.2) から導出せよ。

(3) 無限積表示

$$\vartheta_1(z)=2Gq^{1/4}\sin z\prod_{n\geq 1}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n})$$

を使って (10.4) を確認せよ。

(4) 等式 (10.5) について、2 番目と 3 番目の等号を確認せよ。

10.1.2　Jacobi 三重積公式の定数部分 [§21.42]

前回扱わなかった Jacobi の三重積公式の定数部分を決定しよう。

定理 (Jacobi の三重積公式). $(x;q)_\infty := \prod_{n=1}^{\infty}(1-xq^{n-1}) = (1-x)(1-xq)(1-xq^2)\cdots$ とすると

$$\vartheta_4(z,q) = G\,(qe^{2iz};q^2)_\infty\,(qe^{-2iz};q^2)_\infty, \quad G := (q^2;q^2)_\infty.$$

証明. 無限積表示から

$$\begin{aligned} \vartheta_1' &= \phi(0) = 2q^{1/4}G\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})^2, & \vartheta_2 &= 2q^{1/4}G\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n})^2, \\ \vartheta_3 &= G\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})^2, & \vartheta_4 &= G\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})^2. \end{aligned}$$

従って前節の定理は次のように書き換えられる。

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})^2 = G^2\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n})^2\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})^2\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})^2. \tag{10.6}$$

ここで等式

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n}) = \Big[\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})\Big]\cdot\Big[\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n})\Big] \tag{10.7}$$

に注意すると、(10.6) は更に

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})^2 = G^2$$

となる。従って $G = \pm\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})$.

符号を決める為に極限 $q\to 0$ を考える。級数による定義 (10.1) から $\lim_{q\to 0}\vartheta_3(z,q) = 1$ なので $\lim_{q\to 0} G = 1$. これから $G = \prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})$. □

問題 10.3 (∗). (10.7) を示せ。

10.2　Jacobi の変換公式 [§21.51]

定理.

$$\begin{aligned} \vartheta_3(z|\tau) &= (-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{z^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), & \vartheta_4(z|\tau) &= (-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{z^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_2\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), \\ \vartheta_2(z|\tau) &= (-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{z^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_4\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), & \vartheta_1(z|\tau) &= i(-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{z^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}$$

注意. Whittaker-Watson には imaginary transformation とあるので直訳なら「虚数変換公式」だが、これは τ が純虚数の場合を意識した用語である。τ が純虚数以外の場合も考慮して「モジュラー変換公式」と訳すこともある。

証明. $\tau' := -1/\tau$, $q' := \exp(i\pi\tau')$ と略記する。$\vartheta_3(z|\tau)$ と $\vartheta_3(\tau' z|\tau')$ の零点はそれぞれ

$$z = (m+1/2)\pi + (n+1/2)\pi\tau, \quad \tau' z = (m'+1/2)\pi + (n'+1/2)\pi\tau'$$

と書ける。$(m',n') = (-n-1,m)$ とすることで

$$\psi(z) := \exp\left(\frac{z^2}{i\pi\tau}\right)\frac{\vartheta_3(-\tau' z|\tau')}{\vartheta_3(z|\tau)}$$

が零点を持たない整関数だと分かる。また

$$\psi(z+\pi\tau)/\psi(z) = \psi(z-\pi)/\psi(z) = 1 \tag{10.8}$$

も分かる。従って $\psi(z)$ は定数 A である。$\vartheta_3(z)$ は偶関数なので

$$A\vartheta_3(z|\tau) = \exp(i\tau' z^2/\pi)\vartheta_3(\tau' z|\tau').$$

この等式で $z \mapsto z - \pi/2, z + \pi\tau/2, z - \pi/2 + \pi\tau/2$ とすれば

$$\begin{aligned} &A\vartheta_4(z|\tau) = \exp(i\tau' z^2/\pi)\vartheta_2(\tau' z|\tau'), \quad A\vartheta_2(z|\tau) = \exp(i\tau' z^2/\pi)\vartheta_4(\tau' z|\tau'), \\ &A\vartheta_1(z|\tau) = -i\exp(i\tau' z^2/\pi)\vartheta_1(\tau' z|\tau') \end{aligned} \tag{10.9}$$

を得る。従ってあとは A を求めればよい。

(10.9) の最後の式を微分して $z = 0$ とすると

$$A\vartheta_1'(0|\tau) = -i\tau'\vartheta_1'(0|\tau').$$

一方で §10.1.1 の定理から

$$\vartheta_1'(0|\tau) = \vartheta_2(0|\tau)\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau), \quad \vartheta_1'(0|\tau') = \vartheta_2(0|\tau')\vartheta_3(0|\tau')\vartheta_4(0|\tau')$$

だから、これらを代入して再び (10.9) を使うと $A^{-2} = -i\tau'$. よって $A = \pm(-i\tau)^{1/2}$.

符号を決めるために $A\vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_3(0|\tau')$ で $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$ の場合を考える。$\tau' \in i\mathbb{R}_{>0}$ であり、また $\vartheta_3(0|\tau)$ の級数による定義 (10.1) から $\vartheta_3(0|\tau) > 0$ かつ $\vartheta_3(0|\tau') > 0$ と分かる。よって $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$ の場合は $A = (-i\tau)^{1/2}$. 等式 $A\vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_3(0|\tau')$ の両辺は τ に関して解析的だから、解析接続により任意の τ について $A = (-i\tau)^{1/2}$ だと分かる. □

問題 10.4 (∗)**.** (1) (10.8) を確認せよ。
(2) (10.9) を確認せよ。

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 10.1 (10 点、テキスト 477–478 頁 §21.6)**.** $\xi(z) := \vartheta_2(z)/\vartheta_4(z)$ が次の微分方程式を満たす事を示せ。

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = (\vartheta_2^2 - \xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2 - \xi^2\vartheta_2^2).$$

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §§21.4–21.51.

次回以降

次回からグループ学習及び発表です。

以上です。