2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 23 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

9　テータ関数 1

問題 9.1. 任意の $M>0$ をとって固定する。$|z|<M$ なら $|q^{n^2}e^{2niz}| \le |q|^{n^2}e^{2|n|M}$. 次に $\sum_{n\ge 0}|q|^{n^2}e^{2nM}$ を考えると、隣接項の比 $|q|^{2n+1}e^{2M}$ は $n\to\infty$ で 0 に収束するから、d'Alembert の判定法が使えてこの級数は収束する。よって優級数定理より $\vartheta_4(z)$ も一様収束する。M は任意だったので $\vartheta_4(z)$ は広義一様収束する。

問題 9.2. 以下のように和をとる n をずらすと結論が得られる。

$$\begin{aligned}\vartheta_4(z+\pi\tau) &= \textstyle\sum_n(-1)^n q^{n^2}\exp(2ni(z+\pi\tau)) = \sum_n(-1)^n q^{n^2+2n}e^{2niz} = q^{-1}\sum_n(-1)^n q^{(n+1)^2}e^{2niz}\\ &= -q^{-1}e^{-2iz}\textstyle\sum_n(-1)^{n+1}q^{(n+1)^2}e^{2(n+1)iz} = -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z).\end{aligned}$$

問題 9.3. $\vartheta_3(z)$ については

$$\vartheta_3(z)=\vartheta_4(z+\pi/2)=\textstyle\sum_n(-1)^n q^{n^2}\exp(2ni(z+\pi/2))=\sum_n q^{n^2}e^{2niz}=1+2\sum_{n\ge 1}q^{n^2}\cos 2nz.$$

$\vartheta_1(z)$ については

$$\begin{aligned}&\vartheta_1(z) = -i\exp(iz+i\pi\tau/4)\vartheta_4(z+\pi\tau/2)\\ &= -i\exp(iz+i\pi\tau/4)\textstyle\sum_n(-1)^n q^{n^2}\exp(2ni(z+\pi\tau/2)) = -i\exp(iz+i\pi\tau/4)\sum_n(-1)^n q^{n^2+n}e^{2niz}\\ &= -ie^{iz}\textstyle\sum_n(-1)^n q^{n^2+n+1/4}e^{2niz} = -ie^{iz}\sum_n(-1)^n q^{(n+1/2)^2}e^{2niz}\\ &= -i\textstyle\sum_n(-1)^n q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)iz} = 2\sum_{n\ge 0}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)z.\end{aligned}$$

$\vartheta_2(z)$ については上記の $\vartheta_3(z)$ の最後から 2 番目の式を使って

$$\begin{aligned}\vartheta_2(z) &= \vartheta_1(z+\pi/2) = -i\textstyle\sum_n(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)i(z+\pi/2)) = \sum_n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)iz)\\ &= 2\textstyle\sum_{n\ge 0}q^{(n+1/2)^2}\cos((2n+1)z)\end{aligned}$$

問題 9.4. 定義及び三角関数による展開から示せる。

問題 9.5. 問題 9.4 を繰り返し使うと示せる。

問題 9.6. $\vartheta_{1,2,3}(z)$ は $\vartheta_4(z)$ で z をシフトしたものだから $\vartheta_4(z)$ について示せば十分。$j,k\in\mathbb{Z}$ について

$$\begin{aligned}\vartheta_4(z+j\pi+k\pi\tau) &= \textstyle\sum_n(-1)^n q^{n^2}\exp(2ni(z+j\pi+k\pi\tau)) = \sum_n(-1)^n q^{n^2+2nk}e^{2inz}\\ &= (-1)^k q^{-k^2}e^{-2ikz}\textstyle\sum_n(-1)^{n+k}q^{(n+k)^2}e^{2i(n+k)z} = (-1)^k q^{-k^2}e^{-2ikz}\vartheta_4(z)\end{aligned}$$

となるので $\vartheta_4(z_0)=0$ なら $\vartheta_4(z_0+j\pi+k\pi\tau)=0$ である。

問題 9.7. 前問と同様に $\vartheta_4(z)$ の場合だけ示せば十分。前半は $\vartheta_4(z+\pi)=\vartheta_4(z)$ とその微分 $\vartheta_4'(z+\pi)=\vartheta_4'(z)$ から従う。後半は $\vartheta_4(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z)$ とその微分 $\vartheta_4'(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4'(z)+2iq^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z)$ から従う。

問題 9.8. $\vartheta_1(0)=0$ は §9.1.1 の sin による展開公式から分かる。§9.1.2 の命題より基本領域内には零点はこの 1 つで、補題より他の零点は 0 と合同であることも分かる。また $\vartheta_{2,3,4}(z)$ については定義から $\vartheta_1(z)$ の z をシフトしたものなので直ぐに分かる。

[*1] 2017/06/23 版, ver. 0.2.

問題 9.9. 簡単なので省略。

問題 9.10. 1 行目の [3] については問題 9.5 から直ちに従う。2 行目以降は $z \mapsto z+\pi$ で $(w', x', y', z') \mapsto (w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}, y'+\frac{\pi}{2}, z'-\frac{\pi}{2})$ となることと問題 9.4 から従う。例えば 2 行目の $[1]'$ については

$$[1]'(z+\pi) = \vartheta_1(w'+\pi/2)\vartheta_1(x'+\pi/2)\vartheta_1(y'+\pi/2)\vartheta_1(z'-\pi/2) = \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\cdot(-1)\vartheta_2(z') = -[2]'(z).$$

問題 9.11. $e^{2i(z+\pi)} = e^{2iz}$ より $f(z+\pi) = f(z)$ は直ちに従う。後半は $e^{2i(z+\pi\tau)} = e^{2iz}q^2$ から

$$f(z+\pi\tau) = (qq^2e^{2iz}; q^2)_\infty (qq^{-2}e^{-2iz}; q^2)_\infty = \frac{1-q^{-1}e^{-2iz}}{1-qe^{2iz}} f(z) = -q^{-1}e^{-2iz} f(z).$$

以上です。