2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 23 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

今回と次回で Chap. XXI を扱います。

問題についている $\star$ の数は難易度を表します。既に問題演習の発表をしている人がまた発表する場合は、できるだけ難しい問題に挑戦して下さい。

9　テータ関数 1

τ は虚部が正の複素数とし、$q := \exp(i\pi\tau)$ とする。特に $|q| < 1$ である。

9.1　定義 [Whittaker-Watson §21.1]

定義. z の関数 $\vartheta_4(z,q)$ を次で定義する。

$$\vartheta_4(z,q) := \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}$$

問題 9.1 ($*$)**.** d'Alembert の判定法と優級数定理を使って、$\vartheta_4(z,q)$ が z の関数として広義一様収束することを確認せよ (テキスト 463 頁に議論が書いてあります)。

命題. $\vartheta_4(z,q)$ は以下の性質を満たす。

$$\vartheta_4(z,q) = 1 + 2\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz. \quad 特に \vartheta_4(z+\pi,q) = \vartheta_4(z,q).$$
$$\vartheta_4(z+\pi\tau,q) = -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z,q).$$

問題 9.2 ($*$)**.** $\vartheta_4(z+\pi\tau,q) = -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_4(z,q)$ を示せ。

9.1.1　4 つのテータ関数 [§21.11]

定義. z の関数 $\vartheta_3(z,q), \vartheta_1(z,q), \vartheta_2(z,q)$ を次で定義する。

$$\begin{array}{rclcl}
\vartheta_3(z,q) &:=& \vartheta_4(z+\pi/2,q) &=& 1+2\sum_{n\geq 1} q^{n^2}\cos 2nz, \\
\vartheta_1(z,q) &:=& -ie^{iz+\pi i\tau/4}\vartheta_4(z+\pi\tau/2,q) &=& 2\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)z, \\
\vartheta_2(z,q) &:=& \vartheta_1(z+\pi/2,q) &=& 2\sum_{n\geq 0} q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)z,
\end{array}$$

特に ϑ_1 は奇関数、$\vartheta_{2,3,4}$ は偶関数である。

問題 9.3 ($*$)**.** 上の 3 つの等式を確認せよ。

以下簡単のため $\vartheta_k(z) := \vartheta_k(z,q)$ と q を省略して書く。

問題 9.4 ($*$ P464 Example 2)**.** 以下の等式が成立することを確認せよ。但し $M := q^{1/4}e^{iz}$.

$$\begin{array}{rclclcl}
\vartheta_1(z) &=& -\vartheta_2(z+\frac{\pi}{2}) &=& -iM\vartheta_3(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &=& -iM\vartheta_4(z+\frac{\pi\tau}{2}), \\
\vartheta_2(z) &=& M\vartheta_3(z+\frac{\pi\tau}{2}) &=& M\vartheta_4(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &=& \vartheta_1(z+\frac{\pi}{2}), \\
\vartheta_3(z) &=& \vartheta_4(z+\frac{\pi}{2}) &=& M\vartheta_1(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &=& M\vartheta_2(z+\frac{\pi\tau}{2}), \\
\vartheta_4(z) &=& -iM\vartheta_1(z+\frac{\pi\tau}{2}) &=& iM\vartheta_2(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}) &=& \vartheta_3(z+\frac{\pi}{2}).
\end{array}$$

問題 9.5 ($*$ P465 Example 3)**.** 以下の等式が成立することを確認せよ。但し $N := q^{-1}e^{-2iz}$.

$$\begin{array}{rclcrcl}
\vartheta_1(z+\pi) &=& -\vartheta_1(z), & \vartheta_1(z+\pi\tau) &=& -N\vartheta_1(z), \\
\vartheta_2(z+\pi) &=& -\vartheta_2(z), & \vartheta_2(z+\pi\tau) &=& N\vartheta_2(z), \\
\vartheta_3(z+\pi) &=& \vartheta_3(z), & \vartheta_3(z+\pi\tau) &=& N\vartheta_3(z), \\
\vartheta_4(z+\pi) &=& \vartheta_4(z), & \vartheta_4(z+\pi\tau) &=& -N\vartheta_4(z).
\end{array}$$

[*1] 2017/06/22 版, ver. 0.3.

9.1.2　テータ関数の零点 [§21.12]

以下 $\vartheta(z)$ を $\vartheta_1(z),\dots,\vartheta_4(z)$ のうちの 1 つとする。

補題. $z_0\in\mathbb{C}$ が $\vartheta(z)$ の零点なら、$z_0+\pi\mathbb{Z}+\pi\tau\mathbb{Z}$ の任意の点も $\vartheta(z)$ の零点。

問題 9.6 (∗)**.** この補題を示せ。

そこで楕円関数に関する用語を踏襲して、$t, t+\pi, t+\pi+\pi\tau, t+\pi\tau$ を頂点とする平行四辺形で周上に零点がないものを ϑ の基本領域と呼ぶことにする。また $z+\pi\mathbb{Z}+\pi\tau\mathbb{Z}$ の点と z を合同と呼ぶことにする。

命題. ϑ は基本領域の内部に 1 位の零点を 1 つのみ持つ。

証明. C を基本領域の境界を反時計回りにまわる積分路とする。楕円関数の時の議論と同様に、基本領域内の ϑ の (重複度込みの) 零点の個数は $(2\pi i)^{-1}\int_C \vartheta'(z)/\vartheta(z)dz$ となることから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi}\left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}-\frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}\right\}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau}\left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}-\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}\right\}dz\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi}2idz=1.\end{aligned}$$

但し 2 番目の等式では次の問題 9.7 の結果を使った。 □

問題 9.7 (∗)**.** 次の等式を示せ。

$$\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}=\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)},\quad \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}=\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}-2i.$$

定理. $\vartheta(z)$ の零点はそれぞれ以下の点と合同な点で与えられる。

$$\vartheta_1(0)=\vartheta_2(\frac{\pi}{2})=\vartheta_3(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2})=\vartheta_4(\frac{\pi\tau}{2})=0.$$

問題 9.8 (∗)**.** この定理を確かめよ。

9.2　加法定理 [§21.22]

複素変数 w,x,y,z に対し「双対」変数 w',x',y',z' を以下のように定める。

$$2w'=-w+x+y+z,\quad 2x'=w-x+y+z,\quad 2y'=w+x-y+z,\quad 2z'=w+x+y-z.$$

問題 9.9 (∗)**.** 変換 $(w,x,y,z)\longmapsto(w',x',y',z')$ は対合的、即ち 2 回行うと元に戻ることを確認せよ。

また以下のように略記する。

$$[r]:=\vartheta_r(w)\vartheta_r(x)\vartheta_r(y)\vartheta_r(z),\quad [r]':=\vartheta_r(w')\vartheta_r(x')\vartheta_r(y')\vartheta_r(z').$$

定理 (Jacobi の加法定理)**.** 以下の関係式が成立する。

$$2[3]=-[1]'+[2]'+[3]'+[4]', \tag{9.1}$$
$$2[4]=\ \ [1]'-[2]'+[3]'+[4]', \tag{9.2}$$
$$2[1]=\ \ [1]'+[2]'-[3]'+[4]', \tag{9.3}$$
$$2[2]=\ \ [1]'+[2]'+[3]'-[4]'. \tag{9.4}$$

準備を 1 つしておく。以下 $\vartheta_j:=\vartheta_j(0)$ と略記する。前節の定理より $\vartheta_1=0$.

命題 (テキスト 466 頁、§21.2)**.** 以下の関係式が成り立つ。

$$\vartheta_4^2\vartheta_4^2(z)=\vartheta_3^2\vartheta_3^2(z)-\vartheta_2^2\vartheta_2^2(z).$$

特に $z=0$ として

$$\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4. \tag{9.5}$$

証明. 次の関係式を示せばよい。

$$\vartheta_3^2\vartheta_4^2(z)-\vartheta_2^2\vartheta_1^2(z)=\vartheta_4^2\vartheta_3^2(z).$$

実際この式で $z\mapsto z+\pi/2$ として問題 9.4 を用いれば結論が得られる。$\vartheta_1^2(z),\vartheta_3^2(z),\vartheta_4^2(z)$ は問題 9.5 より擬周期性 $f(z+\pi)=f(z)$, $f(z+\pi\tau)=q^{-2}e^{-4iz}f(z)$ を満たす。よって a,b を定数として

$$g(z):=\frac{a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

は 2 重周期関数。特異点は $\vartheta_3(z)$ の零点が高々 2 位の極として現れるだけである。$a:b$ を適当にとってこの極の位数を 1 にできる。すると $g(z)$ は位数 1 の楕円関数になるが、定数でない楕円関数の極の位数の和は 2 以上だから、$g(z)$ は定数。必要なら (比 $a:b$ は変えないまま)a,b の値を取り直して $g(z)=1$ とできる。

この時点で

$$a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)=\vartheta_3^2(z)$$

なので、あとは a,b の値を決めれば良い。$z=0$ を代入すると $b\vartheta_4^2=\vartheta_3^2$. また $z=\pi\tau/2$ を代入すると、問題 9.4 と §9.1.2 の定理より $\vartheta_1(\pi\tau/2)=iq^{-1/4}\vartheta_4$, $\vartheta_3(\pi\tau/2)=q^{-1/4}\vartheta_2$, $\vartheta_4(\pi\tau/2)=0$ なので $-a\vartheta_4^2=\vartheta_2^2$. □

定理の証明. まず (9.1) を示す。$[r]$ を z の関数とみなし $[r](z)$ と書く。同様に $[r]'$ を z の関数 (z' の関数ではない) とみなし $[r]'(z)$ と書く。問題 9.4 と問題 9.5 より、$N:=q^{-1}e^{-2iz}$ として

$$\begin{array}{rclrcl}
[3]\ (z+\pi) &=& [3]\ (z), & [3]\ (z+\pi\tau) &=& N[3]\ (z),\\
[1]'(z+\pi) &=& -[2]'(z), & [1]'(z+\pi\tau) &=& -N[4]'(z),\\
[2]'(z+\pi) &=& -[1]'(z), & [2]'(z+\pi\tau) &=& N[3]'(z),\\
[3]'(z+\pi) &=& [4]'(z), & [3]'(z+\pi\tau) &=& N[2]'(z),\\
[4]'(z+\pi) &=& [3]'(z), & [4]'(z+\pi\tau) &=& -N[1]'(z).
\end{array} \tag{9.6}$$

(9.6) より (9.1) の両辺は z の関数と見なせば共に $f(z+\pi)=f(z)$, $f(z+\pi\tau)=Nf(z)$ を満たすことが分かるから、両辺の比 $g(z)$ は 2 重周期関数。左辺 $2[3](z)$ を分母とすると、$g(z)$ の極は $\vartheta_3(z)$ の零点なので、$g(z)$ は位数 1 の楕円関数。従って $g(z)$ は定数。よって z によらない複素数 A があって

$$A[3]=-[1]'+[2]'+[3]'+[4]'.$$

ところで以上の議論は z を w,x,y に置き換えても成立するので、A はどの変数にもよらない。A を決定するのに $w=x=y=z=0$ として $A\vartheta_3^4=\vartheta_2^4+\vartheta_3^4+\vartheta_4^4$. すると上の命題の (9.5) より $A=2$. □

問題 9.10 ($*$)**.** (9.6) を確かめよ。

9.3　無限積表示 [§21.3]

定理 (Jacobi の三重積公式)**.** 定数 G があって次の等式が成立する。

$$\vartheta_4(z)=G\,(qe^{2iz};q^2)_\infty\,(qe^{-2iz};q^2)_\infty.$$

但し $(x;q)_\infty:=\prod_{k=1}^{\infty}(1-xq^{k-1})=(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\cdots$.

証明. 右辺の G 以外の部分を

$$f(z) := (qe^{2iz}; q^2)_\infty (qe^{-2iz}; q^2)_\infty = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{2n-1}e^{2iz}) \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{2n-1}e^{-2iz})$$

と置く。$|q| < 1$ より $\sum_{n=1}^{2n-1} q^{2n-1}$ は収束するから、$|z|$ が有界な領域で $f(z)$ は絶対一様収束する。よって $f(z)$ は整関数 ($\mathbb{C}$ 上正則な関数) である。

$f(z)$ の零点は

$$e^{2iz} = e^{(2n-1)\pi i\tau} \ (n \in \mathbb{Z}) \iff 2iz = (2n-1)\pi i\tau + 2m\pi i \ (n, m \in \mathbb{Z}) \iff z \in \frac{\pi\tau}{2} + \pi\mathbb{Z} + \pi\tau\mathbb{Z}.$$

§9.1.2 の定理から $\vartheta_4(z)$ の零点と一致する。特に $f(z)/\vartheta_4(z)$ は極を持たない。また

$$f(z + \pi) = f(z), \quad f(z + \pi\tau) = -q^{-1}e^{-2iz}f(z). \tag{9.7}$$

よって $f(z)/\vartheta_4(z)$ は極を持たない楕円関数なので定数である。 □

問題 9.11 (∗)**.** (9.7) を確認せよ。

次回 $G = (q^2; q^2)_\infty$ であることを証明する。

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 9.1 (5 点、テキスト 464 頁 Example 1)**.** 次の関係式を示せ。

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) + \vartheta_2(2z, q^4), \quad \vartheta_4(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) - \vartheta_2(2z, q^4).$$

レポート問題 9.2 (5 点、テキスト §21.3)**.** 無限積表示 $\vartheta_4(z) = G(qe^{2iz}; q^2)_\infty (qe^{-2iz}; q^2)_\infty$ から以下の等式を導け。

$$\begin{aligned}
\vartheta_4(z) &= G\prod_{n\geq 1}(1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}), \\
\vartheta_3(z) &= G\prod_{n\geq 1}(1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}), \\
\vartheta_1(z) &= 2Gq^{1/4}\sin z\prod_{n\geq 1}(1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}), \\
\vartheta_2(z) &= 2Gq^{1/4}\cos z\prod_{n\geq 1}(1 + 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}),
\end{aligned}$$

レポート問題 9.3 (10 点)**.** §9.3 の定理の証明で用いた、次の無限積の一様収束判定法を証明せよ:
無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$ が領域 D で一様収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $z \in D$ に依存しない自然数 m があって $|\prod_{n=1}^{m+p}(1 + u_n(z)) - \prod_{n=1}^{m}(1 + u_n(z))| < \varepsilon$ が任意の自然数 p について成り立つことをいう。
もし $z \in D$ に依存しない $M_n > 0$ があって $|u_n(z)| < M_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するなら、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$ は一様収束する。

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §§21.1–21.41.

以上です。