2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 16 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

8 超幾何関数 2

問題 8.1. (1)

$$
\begin{aligned}
F(\alpha,\beta;\gamma;z) &= \sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}z^k = \sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+k)}\frac{1}{\Gamma(k+1)}z^k \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)}z^k = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+k)}z^k \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}B(\alpha+k,\gamma-\alpha)z^k.
\end{aligned}
$$

(2) (8.3) 式右辺の最初の因子を省略すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}B(\alpha+k,\gamma-\alpha)z^k &= \sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}z^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}dx \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}\int_0^1 (zx)^k x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}dx
\end{aligned}
$$

(3) ガンマ関数の公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

を使う。考慮するべき部分だけ書くと

$$\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)} = (-1)^k\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta-k)\Gamma(1+k)} = (-1)^k\binom{-\beta}{k}.$$

これから結論が従う。

問題 8.2. $x=1/yz$ より $dx=-z^{-1}y^{-2}dy$ に注意して

$$
\begin{aligned}
X(z,x)dx &= x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}dx = -(yz)^{1-\alpha}(1-1/yz)^{\gamma-\alpha-1}(1-1/y)^{-\beta}z^{-1}y^{-2}dy \\
&= -z^{-1}(yz)^{(1-\alpha)-(\beta-\gamma)}y^{\beta-2}(yz-1)^{\gamma-\alpha-1}(y-1)^{-\beta}dy \\
&= -z^{1-\gamma}y^{\beta-\gamma}(yz-1)^{\gamma-\alpha-1}(y-1)^{-\beta}dy.
\end{aligned}
$$

ここで偏角の条件 $\arg(y-1)=-\pi$, $\arg(zy-1)>0$ を使って式変形すると

$$X(z,x)dx = -z^{1-\gamma}e^{\pi i(\beta+\gamma-\alpha-1)}y^{\beta-\gamma}(1-y)^{-\beta}(1-yz)^{\gamma-\alpha-1}dy.$$

これから結論が従う。

問題 8.3. 省略。

問題 8.4. i) $\rho_{L_1}(u_1)$ について。
積分路 $\overrightarrow{(0,1)}$ は $\overrightarrow{(0,1)}+\overrightarrow{(1,1/z)}+\overrightarrow{(1/z,1)}$ にかわる。最後の $\overrightarrow{(1/z,1)}$ では $x=1/z$ を 1 周した後なので $\arg(1-xz)$ が 2π 増えている。よって

$$\rho_{L_1}(u_1) = \left\{\int_0^1 + \int_1^{1/z} + e(-\beta)\int_{1/z}^1\right\}X_b(x,z)dx = u_1 + (1-e(-\beta))u_2.$$

[*1] 2017/06/15 版, ver. 0.1.

ii) $\rho_{L_1}(u_2)$ について。
積分路 $\overrightarrow{(1, 1/z)}$ は不変。$(1-x)^{\gamma-\alpha-1}$ の偏角の変化は $e(\gamma-\alpha-1) = e(\gamma-\alpha)$. また $\arg(1-zx) = \arg z + \arg(1/z - x)$ と分解すると $\arg z$ の変化は 0, $\arg(1/z - x)$ の変化は 2π だから $(1-zx)^{-\beta}$ の偏角の変化は $e(-\beta)$. よって

$$\rho_{L_1}(u_2) = e(\gamma-\alpha-\beta)\int_{1/z}^{1} X_b(x,z)dx = e(\gamma-\alpha-\beta)u_2.$$

連絡事項

次回からは Whittaker-Watson に戻って Chap. XXI のテータ関数を扱います。

次週提出のレポートに、7 月のグループ学習の発表で**各自扱いたいテーマをレポートに記載**して下さい。テーマごとにグループ分けする予定ですが、既にグループを組む相手が決まっている場合は**グループのメンバーも記載**して下さい。

次回以降の予定を以下のように変更しました。

日付	内容
06/23	テータ関数 1
06/30	テータ関数 2
07/07	発表 1
07/14	**休講**
07/21	発表 2
07/28	発表 3
08/04	**休講**

以上です。