2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 16 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

今回で超幾何関数はおしまいです。少しテキストの内容から離れて、超幾何関数の積分表示とモノドロミー表現を扱います。

8　超幾何関数 2

8.1　超幾何関数の積分表示

ガンマ関数とベータ積分の関係を思い出そう。$z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ に対しガンマ関数は $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ で定義される。ベータ積分は $p, q \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$ に対し

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \tag{8.1}$$

で定義される。この時

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{8.2}$$

ここで式 (8.2) の右辺は $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を使って $p, q \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ まで解析接続できる。そこで左辺も (8.2) によって $p, q \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ で定義されているものとみなす。

次に二項定理

$$(1+x)^c = \sum_{k \ge 0} \binom{c}{k} x^k, \quad \binom{c}{k} := \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-k+1)\Gamma(k+1)}$$

を思い出す。c は任意の複素数で、左辺は $\exp(c \log(1+x))$ で定義していて、$\log$ の分岐は $x = 0$ で $(1+x)^c = 1$ となるように取るものとする。右辺は一般に無限和だが、$c \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ ならば c 次までの有限和になって高校数学で扱う二項定理に帰着する。

以上の準備のもと、超幾何関数

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_{k \ge 0} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(1)_k (\gamma)_k} z^k, \quad (\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$$

の積分表示を求める。

問題 8.1 (∗)**.** (1) $\alpha, \gamma - \alpha \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ と仮定する。$(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ と (8.2) を使って次の等式を確認せよ。

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k \ge 0} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)} B(\alpha+k, \gamma-\alpha) z^k. \tag{8.3}$$

(2) $\mathrm{Re}\, \alpha, \mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ と仮定する。ベータ積分の定義式 (8.1) と式 (8.3) から次の等式を導け。

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k \ge 0} \int_0^1 \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)} (zx)^k x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} dx. \tag{8.4}$$

(3) 式 (8.4) から次の等式を導け。

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k \ge 0} \int_0^1 \binom{-\beta}{k} (-zx)^k x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} dx. \tag{8.5}$$

[*1] 2017/06/16 版, ver. 0.4.

式 (8.5) の右辺について、$|z| < 1$ なら $\sum_{k\geq 0} \binom{-\beta}{k}(-zx)^k$ は $0 \leq x \leq 1$ で一様に $(1-zx)^{-\beta}$ に収束するから、積分と無限和の順序を交換できる。以上より

定理 8.1.1. $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha) > 0$, $|z| < 1$ ならば

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}dx.$$

8.1.1　その他の解の積分表示

$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ は微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \big(\gamma-(\alpha+\beta+1)z\big)\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \tag{8.6}$$

の $z=0$ まわりの正則解であった。前節 §8.1 と同様にその他の解の積分表示を見つけることもできるが、ここでは以下のような議論をしてみる。まず §8.1 の定理 8.1.1 の被積分関数を

$$X(z,x) := x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}$$

と書く。§8.1 では $\int_0^1 X(z,x)dx$ を考えたのだが、積分路の端点 $x=0$ と $x=1$ は $X(z,x)$ の零点又は特異点であることに注意する。そこで積分路を $1/z$ から (0 と反対方向に)∞ までの半直線 $\overrightarrow{(1/z,\infty)}$ に取り直して

$$\int_{1/z}^{\infty} X(z,x)dx$$

を考えてみる。

議論を簡単にするため $\mathrm{Im}\,z > 0$, $0 < |z| < 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ を固定する。また積分路上での $X(x,z)$ の値を確定するため以下の仮定をおく。

$$\arg x = -\arg z, \quad \pi/2 < \arg(1-x) + \arg z < \pi, \quad \arg(1-zx) = -\pi. \tag{8.7}$$

そして積分変数の変換

$$zx = 1/y$$

を行う。積分路は $x \in \overrightarrow{(1/z,\infty)} \iff y \in \overrightarrow{(1,0)}$ と変換され、また仮定 (8.7) は

$$\arg y = 0, \quad \pi/2 < \arg(zy-1) < \pi, \quad \arg(y-1) = -\pi$$

と書き直せる。これから次の等式が得られる。

$$\int_{1/z}^{\infty} X(z,x)dx = e^{\pi i(\gamma+\beta-\alpha-1)} z^{1-\gamma} \int_0^1 y^{\beta-\gamma}(1-y)^{-\beta}(1-zy)^{\gamma-\alpha-1}dy. \tag{8.8}$$

問題 8.2. 等式 (8.8) を確かめよ。

(8.8) の右辺の積分について、$a := \beta-\gamma+1$, $b := \alpha-\gamma+1$, $c := 2-\gamma$ と置きなおせば前節 §8.1 の結果から

$$\int_0^1 y^a(1-y)^{c-a-1}(1-zy)^{-b}dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z).$$

但し $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\mathrm{Re}\,a > 0$, $\mathrm{Re}(c-a) > 0$, $|z| < 1$. 従って

命題. $\gamma \notin \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathrm{Re}(\beta-\gamma) > -1$, $\mathrm{Re}\,\beta < 1$, $|z| < 1$ ならば

$$\begin{aligned} &z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z) \\ &\quad = e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)} \int_{1/z}^{\infty} x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}dx. \end{aligned}$$

ここで議論した積分路 $\overrightarrow{(1/z,\infty)}$ だけではなく、一般に次の定理が成り立つ。

事実 8.1.2. p,q を $\{0,1,1/z,\infty\}$ の異なる 2 点とする。積分路を端点が p,q となる線分または半直線 $\overrightarrow{(p,q)}$ とする積分

$$\int_p^q X(z,x)dx$$

は、z 及び α,β,γ に適切に条件を付ければ、超幾何微分方程式 (8.6) の解を与える。

これらを超幾何微分方程式の解の **Euler の積分表示**と呼ぶこともある。

8.2 超幾何微分方程式のモノドロミー

超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\bigl(\gamma-(\alpha+\beta+1)z\bigr)\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0$$

のモノドロミーを調べよう。この方程式は領域

$$D=\mathbb{CP}^1\setminus\{0,1,\infty\}$$

で正則な係数を持つ 2 階線形方程式である。

前回 §7.5 の基本群に関する議論を参考に、次のような D 内の閉曲線を取る。まず上半平面を $\mathbb{H}$ と書く。つまり

$$\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z>0\}.$$

$\mathbb{H}\subset D$ に注意。$a\in\mathbb{H}$ を固定する。L_0,L_1 を a を基点とし 0 及び 1 を反時計回りに一周する閉曲線とする (図 1 参照)。§7.5 の事実 7.5.5 から $\pi_1(D,a)=\langle[L_0],[L_1]\rangle$ である。

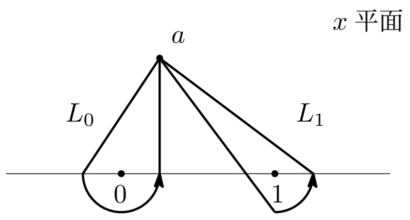

図 1　積分路 L_0, L_1.

基本解の取り方については次の事実を用いる。

事実. §8.1.1 と同様に $X(x,z):=x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}$ とする。図 2 のように brunch cut を決めておいて、$x\in(0,1)$ の時は以下のよう偏角を決めることで $X(x,z)$ の分岐を定める。

$$\arg x=0,\quad \arg(1-x)=0,\quad -\pi<\arg(1-zx)<0. \tag{8.9}$$

このような分岐を取った $X(z,x)$ のことを $X_b(z,x)$ と書く。この時、$z\in\mathbb{H}$ において

$$u_1(z):=\int_0^1 X_b(z,x)dx,\quad u_2(z):=\int_1^{1/z} X_b(z,x)dx$$

は超幾何微分方程式の基本解。但し積分路は線分 $\overrightarrow{(0,1)}$ 及び $\overrightarrow{(1,1/z)}$ を取る。

注意. 事実 8.1.2 から u_1 と u_2 が (それぞれある領域での) 解であることは既に知っている。分岐の取り方から $\mathbb{H}$ 上でどちらも値が確定していて、更に線形独立であることがこの事実の主張である。

以下の副節で u_1, u_2 を L_0, L_1 に沿って解析接続したときの様子を調べる。

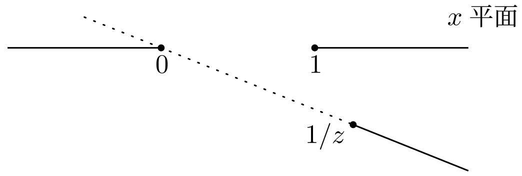

図 2　$X_b(x, z)$ の branch cut.

8.2.1　u_1 の L_0 に沿っての解析接続

補題. $\rho_{L_0}(u_1) = u_1$.

証明. z が L_0 に沿って動くとき $1/z$ は線分 $(0, 1)$ の周りを負の方向 (時計回り) に一周する (図 3 参照)。この時積分路 $\overrightarrow{(0, 1)}$ は不変なので、被積分関数 $X_b(x, z) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}$ の変化を考えればよい。$\arg x$ 及び $\arg(1-x)$ は不変。$\arg(1-zx)$ については

$$\arg(1-zx) = \arg z + \arg(1/z - x)$$

とすれば、$\arg z$ の変化が 2π, $\arg(1/z - x)$ の変化が -2π であることから $\arg(1-zx)$ も不変だと分かる。よって u_1 の L_0 に沿っての解析接続は u_1 自身。 □

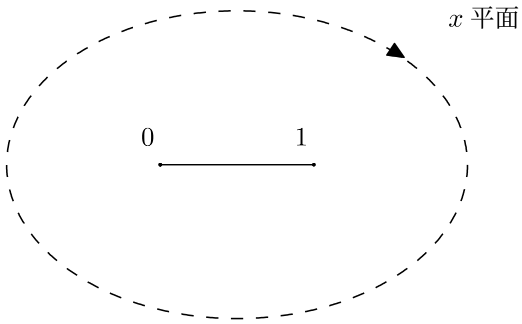

図 3　L_0 に沿って z が動く時の $1/z$ の動き

8.2.2　u_2 の L_0 に沿っての解析接続

以下 $e(y) := \exp(2\pi i y)$ と書く。

補題. $\rho_{L_0}(u_2) = (e(-\alpha) - 1)u_1 + e(-\gamma)u_2$.

証明. z が L_0 に沿って動くときの積分路 $\overrightarrow{(1, 1/z)}$ の変化を考える。端点 $1/z$ が図 3 のように動くことと $0, 1 \notin D$ を考えると、L_0 に沿って z が一周した後の積分路は以下の図 4 のものと D 内でホモトピー同値である。変形後の積分路を $I_1 + I_2 + I_3 = \overrightarrow{(1, 0)} + \overrightarrow{(0, 1)} + \overrightarrow{(1, 1/z)}$ と書く。

次に積分路の各部分について被積分関数 $X_b(x, z) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}$ の偏角を計算しよう。I_1 については偏角の取り方 (8.9) から

$$\int_{I_1} X_b(x, z)dx = -\int_0^1 X_b(x, z)dx \tag{8.10}$$

が分かる。次に I_2 については、I_1 が終わった後で $x = 0$ を時計回りに一周しているので $\arg x$ が -2π 増加している。$\arg(1-x)$ や $\arg(1-zx)$ は変化しないので

$$\int_{I_2} X_b(x, z)dx = e(-\alpha)\int_0^1 X_b(x, z)dx. \tag{8.11}$$

最後に I_3 に移るときには $\arg(1-x)$ だけが -2π 増加するので

$$\int_{I_3} X_b(x,z)dx = e(\alpha-\gamma)e(-\alpha)\int_1^{1/z} X_b(x,z)dx = e(-\gamma)\int_1^{1/z} X_b(x,z)dx. \tag{8.12}$$

よって

$$\rho_{L_0}(u_2) = (8.10) + (8.11) + (8.12) = (e(-\alpha)-1)u_1 + e(-\gamma)u_2.$$

□

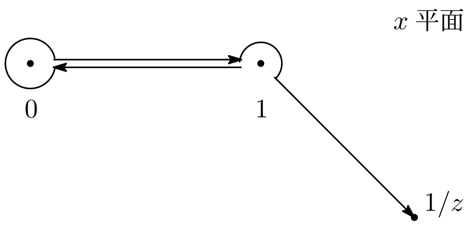

図 4　L_0 にそって z を動かした後の積分路 $(1, 1/z)$.

問題 8.3 $(*)$**.** この補題の証明の最初の部分を説明せよ。即ち、z を L_0 に沿って一周させた後、積分路 $\overrightarrow{(1,1/z)}$ が図 4 の積分路とホモトピー同値になることを説明せよ。

8.2.3　L_1 に沿った変形

補題. $\rho_{L_1}(u_1) = u_1 + (1-e(-\beta))u_2$, $\rho_{L_1}(u_2) = e(\gamma-\alpha-\beta)u_2$.

問題 8.4 $(*)$**.** §8.3.1 や §8.3.2 のように積分路の変形と被積分関数の偏角の変化を計算して、この補題を示せ。

以上をまとめると

定理. ρ を超幾何微分方程式 (8.6) のモノドロミー表現とし、方程式 (8.6) の定義領域の基本群 $\pi(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, a)$ の生成元 $[L_0], [L_1]$ を図 1 のように取る。この時 $\rho([L_0]), \rho([L_1])$ の基本解 (u_1, u_2) に関する表現行列 M_0, M_1 は

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & e(-\alpha)-1 \\ 0 & e(-\gamma) \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-e(-\beta) & e(\gamma-\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

但し $e(y) := \exp(2\pi i y)$.

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 8.1 (20 点、テキスト §14.6)**.** Riemann の P 関数の積分表示を考える。
(1) P 方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}\\&\quad+\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}u=0\end{aligned}$$

の未知関数 $u(z)$ を

$$u(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}I(z)$$

と変換すると、$I(z)$ に関する微分方程式は次のようになることを確認せよ。

$$\begin{aligned}&\frac{d^2I}{dz^2}+\left\{\frac{1+\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1+\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1+\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{dI}{dz}\\&\quad+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(\alpha+\beta+\gamma+1)z+\sum a(\alpha+\beta'+\gamma'-1)\right\}}{(z-a)(z-b)(z-c)}I=0\end{aligned}$$

但し最後の項の分子の $\sum$ は cyclic に和を取ることを意味する。
(2) 更に書き換えると次の方程式が得られることを確認せよ。

$$Q(z)\frac{d^2I}{dz^2}-\{(\lambda-2)Q'(z)+R(z)\}\frac{dI}{dz}+\left\{\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-1)Q''(z)+(\lambda-1)R'(z)\right\}I=0. \tag{8.13}$$

但し $\lambda:=1-\alpha-\beta-\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'$, $Q(z):=(z-a)(z-b)(z-c)$, $R(z):=\sum(\alpha'+\beta+\gamma)(z-b)(z-c)$.
(3) 積分路を適切に選べば、次の積分は (8.13) の解になることを示せ (テキストの 292 頁に書いてあります)。

$$I=\int_C(t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}dt.$$

引用文献

高野恭一「常微分方程式」新数学講座 6、朝倉書店の §12.3–12.6.

以上です。