2017 年度前期 数学演習 IX/X　 6 月 2 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

7　超幾何関数 1

問題 7.2. (1)

$$f_{k+1}p(k) = \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(1)_{k+1}(c)_{k+1}}(k+1)(k+c) = \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(1)_k(c)_k} = \frac{(a)_k(b)_k}{(1)_k(c)_k}(a+k)(b+k) = f_k q(k).$$

(2) $s(x) = x^n$ の時に調べれば十分。$\vartheta_z z^k = kz^k$ より $(\vartheta_z)^n(z^k) = k^n z^k = z^k s(k)$.
(3) 前問の $s(\vartheta_z)(z^k) = z^k s(k)$ と $p(-1) = 0$ から

$$\begin{aligned} p(\vartheta_z - 1)(\sum_{k\geq 0} f_k z^k) &= \sum_{k\geq 0} f_k z^k p(k-1) = \sum_{k\geq -1} z^{k+1} f_{k+1} p(k) = \sum_{k\geq 0} z^{k+1} f_{k+1} p(k), \\ zq(\vartheta_z)(\sum_{k\geq 0} f_k z^k) &= z\sum_{k\geq 0} f_k z^k q(k) = \sum_{k\geq 0} z^{k+1} f_k q(k). \end{aligned}$$

(4) 前問 (3) と (1) から直ちに従う。
(5) $z\frac{d}{dz} = \vartheta_z + 1$ より $\vartheta_z^2 = z^2\frac{d^2}{dz^2} + \vartheta_z$. これから

$$\begin{aligned} z^{-1}L &= z^{-1}\vartheta_z(\vartheta_z + c - 1) - (\vartheta_z + a)(\vartheta_z + b) \\ &= \Big[z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} + (c-1)\frac{d}{dz}\Big] - \Big[z^2\frac{d^2}{dz^2} + \vartheta_z\Big] - (a+b)\vartheta_z - ab \\ &= z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \big(c - (a+b+1)z\big)\frac{d}{dz} - ab. \end{aligned}$$

問題 7.3. 省略。

問題 7.4. (Newton の一般) 二項定理から $(1-w)^{C-A-B} = \sum_{n\geq 0}\binom{C-A-B}{n}(-w)^n$ と展開できるので、$u_3(w) = 1 + O(w)$ となって特に $w = 0$ で正則。超幾何微分方程式の $w = 0$ での特性指数は 0 と $1 - C$ だから、正則な解は定数倍を除いて $u_1(w) = F(A, B; C; w)$ しかない。定数項を比較して $u_3 = u_1$. 同様に $u_4 = u_2$ も示せる。

問題 7.5. $L \simeq L$ はホモトピー写像を $h(t, x) := L(x)$ と定めれば従う。

$L_0 \simeq L_1$ と仮定して h をホモトピー写像とすると、$\overline{h}(t, x) := h(1-t, x)$ によって $L_1 \simeq L_0$ となる。

$L_0 \simeq L_1$ かつ $L_1 \simeq L_2$ と仮定して h_0, h_1 をそれぞれのホモトピー写像とすると、

$$h(t,x) := \begin{cases} h_0(2t, x) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ h_1(2t-1, x) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で h を定めれば $L_0 \simeq L_2$ が従う。

問題 7.6. $L_0 \simeq L_1$ とすると $L' \cdot L_0 \simeq L' \simeq L_1$ である。実際 h を $L_0 \simeq L_1$ のホモトピー写像として

$$\widetilde{h}(t,x) := \begin{cases} h(t, x) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ L'(x) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で $\widetilde{h}$ を定めればこれが求めるホモトピー写像になる。同様に $L_0' \simeq L_1'$ なら $L_0' \cdot L \simeq L_1' \simeq L$. よって $[L'] \cdot [L]$ は well defined.

単位元は定数写像 $L(x) = a$ のホモトピー類、即ち可縮な閉曲線のホモトピー類である。$[L]$ の逆元は $\overline{L}(x) := L(1-x)$ で定まる閉曲線 $\overline{L}$ のホモトピー類 $[\overline{L}]$.

[*1] 2017/06/01 版, ver. 0.1.

結合則 $([L_2]\cdot[L_1])\cdot[L_0]=[L_2]\cdot([L_1]\cdot[L_0])$ を示すにはホモトピー同値 $(L_2\cdot L_1)\cdot L_0\simeq L_2\cdot(L_1\cdot L_0)$ を示せば十分。$\phi(t):=1/2-t/4$, $\psi(t):=3/4-t/4$ として

$$h(t,x):=\begin{cases}L_0(x/\phi(t)) & (0\le x\le\phi(t))\\ L_1\big((x-\phi(t))/(\psi(t)-\phi(t))\big) & (\phi(t)\le x\le\psi(t))\\ L_2\big((x-\psi(t))/(1-\psi(t))\big) & (\psi(t)\le x\le 1)\end{cases}$$

で h を定めるとこれが求めるホモトピー写像になる。

問題 7.7. well-defined であることは補題 7.5.3 より明らか。群準同型であることは補題 7.5.4 と定義及び補題 7.5.2 より $\rho([L']\cdot[L])=\rho([L'\cdot L])=\rho_{L'\cdot L}=\rho_{L'\cdot L}=\rho'_L\cdot\rho_L=\rho([L'])\circ([L])$.

連絡事項

6/9 は名大祭のため休講です。次回は 6/16 です。(なお 6/6(火) は金曜日の講義の振替日ですが、このクラスは振替しません。)

以上です。