2017 年度前期 数学演習 IX/X　6 月 2 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

7　超幾何関数 1

7.2　超幾何微分方程式 [Whittaker-Watson §14.2]

前回導入した超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+(c-(a+b+1)z)\frac{du}{dz}-abu=0 \tag{7.1}$$

を思い出す。対応する Riemann 図式は次のようなものであった。

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix}$$

特に $z=0$ での特性指数は 0 と $1-c$ なので、$(1-c)-0\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$ なら

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} f_n z^n, \quad z^{1-c}\sum_{n\geq 0} g_n z^n$$

の形の基本解を持つ。このうち前者に対応する級数が、前回の最後に導入した超幾何級数に他ならない。

定理. $c\in\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$ ならば超幾何関数 $F(a,b;c;z)$ は (7.1) の解である。

$${}_2F_1(a,b;c;z)=F(a,b;c;z):=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n}z^n=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2+\cdots.$$

問題 7.2 ($\star$)**.** この定理を次のようにして確かめよ。${}_2F_1(a,b;c;z)$ の k 次係数を $f_k:=\frac{(a)_k(b)_k}{(1)_k(c)_k}$ と置く。
(1) $p(x):=(x+1)(x+c)$, $q(x):=(x+a)(x+b)$ とする。この時 $f_{k+1}p(k)-f_kq(k)=0$.
(2) Euler 微分を $\vartheta_z:=z\frac{d}{dz}$ と表す。任意の一変数多項式 $s(x)$ に対し、$s(\vartheta_z)$ を形式的に変数 x を ϑ_z に置き換えてできる微分作用素とする。この時 $s(\vartheta_z)(z^k)=z^ks(k)$.
(3) $p(\vartheta_z-1)({}_2F_1(a,b;c;z))=\sum_{k\geq 0}z^{k+1}f_{k+1}p(k)$, $q(\vartheta_z)({}_2F_1(a,b;c;z))=\sum_{k\geq 0}z^{k+1}f_kq(k)$.
(4) $L:=p(\vartheta_z-1)-zq(\vartheta_z)$ と微分作用素を定義すると $L({}_2F_1(a,b;c;z))=0$.
(5) $z^{-1}L=z(1-z)d^2/dz^2+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)d/dz-\alpha\beta$.

7.3　P 方程式の解と超幾何関数 [§14.3]

(7.1) の $z=0$ 周りのもう一つの解、即ち $z^{1-c}\cdot$(正則関数) の形の解を探すため、前回考えた Riemann 図式の変形を思い出そう。まず Riemann の P 方程式、つまり 3 つの確定特異点 a,b,c を持つ 2 階線形微分方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}\\&\quad+\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-a)}{z-c}\right\}u=0\end{aligned} \tag{7.2}$$

の形に決まることを思い出す。対応する Riemann 図式は次の通り。

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

前回の定理と上の定理から

[*1] 2017/06/02 版, ver. 0.4.

定理. $\alpha-\alpha'\notin\mathbb{Z}$ なら、Riemann の P 方程式 (7.2) は次の解を持つ。

$$u_1 := \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\Big(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta'+\gamma;1+\alpha-\alpha';\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\Big).$$

以下簡単のため

$$\alpha-\alpha',\beta-\beta',\gamma-\gamma'\notin\mathbb{Z} \tag{$\sharp$}$$

と仮定する。α と α' 及び γ と γ' を置換しても P 方程式 (7.2) は変わらない。仮定 ($\sharp$) からこのような置換をしても確定特異点における形式解の作り方が適用できるので、

命題. 以下の u_2,u_3,u_4 も P 方程式 (7.2) の解である。

$$u_2 := \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\Big(\alpha'+\beta+\gamma,\alpha'+\beta'+\gamma;1+\alpha'-\alpha;\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\Big),$$
$$u_3 := \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\Big(\alpha+\beta+\gamma',\alpha+\beta'+\gamma';1+\alpha-\alpha';\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\Big),$$
$$u_4 := \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\Big(\alpha'+\beta+\gamma',\alpha'+\beta'+\gamma';1+\alpha'-\alpha;\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\Big).$$

更に確定特異点 (a,b,c) の順序は不問だから、この 3 点を入れ替えても同じ P 方程式 (7.2) の解になる。つまり $u_1,\dots,u_4$ と確定特異点 (a,b,c) を入れ替えたもの (全部で 24 個ある) は全て P 方程式 (7.2) の解である。

7.4 超幾何微分方程式の解 [§14.4]

前節の P 方程式の解の議論を超幾何微分方程式に適用する、つまり

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} \longmapsto P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & A & w \\ 1-C & C-A-B & B & \end{Bmatrix},\quad w=\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$$

とパラメータを置き換えると、やはり 24 個の解が得られる。そのうち最初の 4 個 $u_1,\dots,u_4$ に注目すると

$$u_1=F(A,B;C;w),\qquad u_2=(-w)^{1-C}F(A-C+1,B-C+1;2-C;w),$$
$$u_3=(1-w)^{C-A-B}F(C-B,C-A;C;w),\quad u_4=(-w)^{1-C}(1-w)^{C-A-B}F(1-B,1-A;2-C;w).$$

問題 7.3 ($\star$)**.** これらの式を確認せよ。

ここで 2 階の線形微分方程式の局所解の空間は 2 次元であることを思い出すと、$u_1,\dots,u_4$ が 4 つとも定義されている領域では、$u_1,\dots,u_4$ の間には線形関係式があることが分かる。

命題. 領域 $\{w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\mid |w|<1,\ |\arg(1-w)|<\pi\}$ では $u_1=u_3$ かつ $u_2=u_4$.

問題 7.4 ($\star$)**.** $w=0$ で u_3 と u_4 を級数展開することでこの命題を示せ。

特に次の主張が得られる。

定理. $c\notin\mathbb{Z}$ ならば、超幾何微分方程式 (7.1) の領域 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ における基本解として、超幾何関数で書ける以下のものが取れる。

$$F(a,b;c;z),\quad z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z).$$

同様に

定理. (1) $a+b-c\notin\mathbb{Z}$ ならば次式は超幾何微分方程式 (7.1) の領域 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|<1\}$ における基本解。

$$F(a,b;a+b-c+1;1-z),\quad (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z).$$

(2) $a-b\notin\mathbb{Z}$ ならば次式は (7.1) の $z=\infty$ の近傍での基本解。

$$z^{-a}F(a,a-c+1;a-b+1;1/z),\quad z^{-b}F(b,b-c+1;b-a+1;1/z).$$

7.5 モノドロミー

この節では一般の線形微分方程式について、そのモノドロミー表現とよばれるものを導入する。なお Whittaker-Watson には該当する部分がないので、次の参考書を挙げておく。

高野恭一「常微分方程式」新数学講座 6、 朝倉書店

久賀道郎「ガロアの夢 — 群論と微分方程式」日本評論社

領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上正則な係数 $a_0(z), \dots, a_n(z)$ から定まる線形微分方程式

$$Du(z) := \Big(a_0(z)\frac{d^n}{dz^n} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z)\Big)u(z) = 0 \tag{7.3}$$

を考える。a の近傍での $Du(z) = 0$ の解空間 V_a は n 次元 $\mathbb{C}$ 線形空間であった。

a を始点かつ終点とする D 内の連続閉曲線を以下簡単に「a を基点とする閉曲線」と呼ぶことにする。D 内の連続曲線は連続写像 $[0,1] \to D$ と同一視できるから、a を基点とする閉曲線 L は $L(0) = L(1) = a$ となる連続写像 $L : [0,1] \to D$ に他ならない。

事実 7.5.1. L を a を基点とする閉曲線とする。
(1) 任意の解 $u(z) \in V_a$ は L に沿って解析接続できる。それを $\rho_L(u(z))$ と書くと $\rho_L(u(z)) \in V_a$.
(2) ρ_L は V_a 上の線形同型。

証明. (1) を認めて (2) だけ示す。解析接続の定義から ρ_L の線形性が言える。また一致の定理から ρ_L が単射であることも分かる。すると、V_a は有限次元なので ρ_L 線形同型。 □

$L' \cdot L$ で a を基点とする閉曲線 L と L' の合成を表す。L, L' を連続写像 $L(x), L(x') : [0,1] \to D$ とみなすと、$L' \cdot L$ は $0 \le x \le 1/2$ なら $L' \cdot L(x) := L(2x)$, $1/2 \le x \le 1$ なら $L' \cdot L(x) := L'(2x-1)$ で与えられる。

補題 7.5.2. $\rho_{L' \cdot L} = \rho_{L'} \circ \rho_L$.

証明. 解析接続の定義から任意の $u(z) \in V_a$ について $\rho_{L' \cdot L}(u(z)) = \rho_{L'}(\rho_L(u(z)))$. □

次にホモトピー同値を定義する。これは「D 内で L_0 を連続変形して L_1 にできる」という意味である。

定義. 基点を a とする閉曲線 L_0, L_1 が**ホモトピー同値**であるとは、次の条件を満たす連続写像 $h : [0,1] \times [0,1] \to D$ が存在することを言う: $h(t,0) = h(t,1) = a$, $h(0,x) = L_0(x)$, $h(1,x) = L_1(x)$. この時 $L_0 \simeq L_1$ と書き、また連続写像 h をホモトピー写像と呼ぶ。

補題 7.5.3. $L_0 \simeq L_1$ ならば $\rho_{L_0} = \rho_{L_1}$.

証明. L_0 と L_1 がホモトピー同値なら、一致の定理から任意の $u(z) \in V_a$ について $\rho_{L_0}(u(z)) = \rho_{L_1}(u(z))$. □

問題 7.5 (∗). ホモトピー同値が a を基点とする閉曲線全体のなす集合の上の同値関係であることを確かめよ。

定義. a を基点とする D 内の閉曲線全体 $P(D,a)$ をホモトピー同値で割った集合 $P(D,a)/\simeq$ を **a を基点とする D の基本群**と呼び $\pi_1(D,a)$ と書く。また閉曲線 $L \in P(D,a)$ の同値類を **L のホモトピー類**と呼び $[L]$ と書く。

補題 7.5.4. $\pi_1(D,a)$ は次の演算を積とする群構造を持つ (そのため基本「群」と呼ぶ)。

$$[L'] \cdot [L] := [L' \cdot L]$$

問題 7.6 (∗∗). この補題を証明せよ (積が well-defined であること、単位元と逆元の存在、結合則を示せ)。

以上でようやくモノドロミー表現の定義の準備が終わった。

定義. 線形方程式 (7.3) の**モノドロミー表現**とは次で定まる群準同型 $\rho : \pi_1(D,a) \to \mathrm{GL}(V_a)$ のことである。

$$\rho : \pi_1(D,a) \to \mathrm{GL}(V_a), \quad \rho([L]) := \rho_L$$

問題 7.7 (∗)**.** 補題 7.5.2–7.5.4 を用いて、上記の ρ が well-defined であること、また群準同型であることを確認せよ。

具体的に ρ を理解するには、例えば次のような方針が考えられる。

- $\pi_1(D,a) = \langle [L_s]\,(s \in S) \mid R\rangle$ と基本群を生成元と関係式で表示する。
- V_a の基底、即ち線形方程式 (7.3) の基本解 $(u_1,\ldots,u_n)$ を取り、各 $s \in S$ について $\rho([L_s]) = \rho_{L_s}$ の基本解に関する表現行列を計算する。

このうち基本群に関しては次の結果が知られている。

事実 7.5.5. $D = \mathbb{CP}^1 \setminus \{m$ 点$\}$ なら、任意の $a \in D$ について $\pi_1(D,a)$ は $m-1$ 個の生成元を持つ自由群。生成元として (適宜 m 点を番号付けして) k 番目の点を周回し他の点は周回しない閉曲線 L_k のホモトピー類が取れる。特に $\pi_1(\mathbb{CP}^1,a)$ は自明群。

表現行列の計算は、基本解の u_i それぞれを上記事実の L_k に沿って解析接続し、一周したところで $u_1,\ldots,u_n$ で展開した時の係数 $\rho_{L_k}(u_i) = \sum_{j=1}^{n} u_j c_{ji}$ を求めることに他ならない。この計算は一般には難しいが、超幾何微分方程式の場合は幸い計算できるので、それを次回で説明する。

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 7.1 (10 点、次回使う内容)**.** ガンマ関数とベータ積分に関する Euler の公式を証明せよ。つまり、$z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,z > 0$ に関するガンマ関数 $\Gamma(z)$ 及び $p, q \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,p > 0$, $\mathrm{Re}\,q > 0$ に関するベータ積分 $B(p,q)$ を

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

で定義すると

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

レポート問題 7.2 (15 点)**.** §7.5 の事実 7.5.5 ($\mathbb{C} \setminus \{m$ 点$\}$ の基本群は m 文字で生成される自由群) を証明せよ (意外に難しいので、適当な文献を探してそこに書かれていることを理解してレポートにして下されば十分です)。

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §14.2–14.4, 14.6.

次回

6/9 は名大祭のため休講です。次回は 6/16 です。(なお 6/6(火) は金曜日の講義の振替日ですが、このクラスは振替しません。)

以上です。