2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 26 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

6　線形微分方程式 2

問題 6.1. $\frac{d}{dz} = -w^2 \frac{d}{dw}$ 及び $\frac{d^2}{dz^2} = w^4 \frac{d^2}{dw^2} + 2w \frac{d}{dw}$ から

$$\Big(w^4 \frac{d^2}{dw^2} + 2w^3 \frac{d}{dw} - p(1/w) w^2 \frac{d}{dw} + q(1/w)\Big) u = 0 \iff \Big(\frac{d^2}{dw^2} + \big(\frac{2}{w} - \frac{p(1/w)}{w^2}\big)\frac{d}{dw} + \frac{q(1/w)}{w^4}\Big) u = 0.$$

すると $w = 0$ が通常点であることは $2/w - p(1/w)/w^2$ と $q(1/w)/w^4$ が共に $w = 0$ で正則であることと同値。よって $p(1/w) = 2w + O(w^2)$ かつ $q(1/w) = O(w^4)$, つまり

$$p(z) = 2z^{-1} + O(z^{-2}), \quad q(z) = O(z^{-4}) \quad (z \to \infty)$$

が求める条件。

問題 6.2. $z = a$ について考える。

$$(z-a)p(z) = p_0 + O(z-a), \quad (z-a)^2 q(z) = q_0 + O(z-a)$$

と Taylor 展開すると、α, α' は決定方程式

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0$$

の解。よって $\alpha + \alpha' = 1 - p_0$. ところで Taylor 展開の仕方から p_0 は $p(z)$ の $z = a$ での極である。よって $p_0 = 1 - \alpha - \alpha'$ が $z = a$ での留数だと分かる。$z = b, c$ についても同様。

問題 6.3. 問題 6.2 から $p(z) =$ (6.2) 式の右辺 + (正則部分) と書ける。あとは $z = \infty \iff w = 0$ 周りの条件から (正則部分) $= 0$ が従う。これで (6.2) 式が得られた。また (6.2) を $z = \infty \iff w = 0$ の周りで書き直すと

$$(3 - \alpha - \alpha' - \beta - \beta' - \gamma - \gamma')w + O(w^2)$$

となるが、問題 6.1 からこれが $2w + O(w^2)$ なので、Fuchs の関係式 (6.3) を得る。

問題 6.4. 問題 6.2 と同様に、$z = a$ での決定方程式を $\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0$ と書くと $\alpha\alpha' = q_0$. よって $q(z) = \alpha\alpha'/(z-a)^2 + \cdots$ となる。$z = b, c$ でも同様。よって $q(z)$ と求める式の差は $A/(z-a) + B/(z-b) + C/(z-c) +$ (正則部分) と書ける。$z = \infty$ での条件から A, B, C 並びに正則部分が 0 だと分かる。

問題 6.5. まず Riemann 図式

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & t & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix}$$

に対応する方程式を求めると

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{c}{z} + \frac{1-(c-a-b)}{z-1} + \frac{1-a-b}{z-t} \right\} \frac{du}{dz} + \frac{1}{z(z-1)(z-t)} \frac{abt(t-1)}{z-t} u = 0.$$

ここで $t \to \infty$ とすれば

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{c}{z} + \frac{1-(c-a-b)}{z-1} \right\} \frac{du}{dz} + \frac{ab}{z(z-1)} u = 0.$$

分母を払うと超幾何微分方程式を得る。

[*1] 2017/05/26 版, ver. 0.2.

問題 6.6. 略。

問題 6.7. $\rho(z) = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$. あるいは次のように議論しても良い: $z = a$ が関数 $\rho(z)$ の零点であることから $A : B$ が決まる。また $z = c$ が極であることから $C : D$ が決まる。最後に $\rho(b) = 1$ から $(A + B) : (C + D)$ が決まる。以上より $\rho(z)$ が一意に決まる。

問題 6.8. 略。

問題 6.9. $u(z)$ が $z = a$ で特性指数 α, α' の確定型 2 階微分方程式 $Du = 0$ をみたすなら、$(z-a)^k u(z)$ が特性指数 $\alpha+k, \alpha'+k$ の確定型 2 階微分方程式をみたすことを示せば十分。しかしこの仮定は解が $u(z) = (z-a)^\alpha(1+O(z))$ 及び $u(z) = (z-a)^{\alpha'}(1+O(z))$ となることだから、$(z-a)^k u(z)$ の満たす方程式の特性指数は当然 $\alpha+k, \alpha'+k$ となる。

7　超幾何関数 1

問題 7.1. (1)

$$F(-n, \beta; \beta; -z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-n)_k(\beta)_k}{(1)_k(\beta)_k}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(1)_k}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+x)^n.$$

(2)

$$zF(1, 1; 2; -z) = z\sum_{k\geq 0} \frac{(1)_k}{(2)_k}(-z)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1} = \log(1+z).$$

(3)

$$F(1, \beta; 1; z/\beta) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\beta)_k}{(1)_k}\left(\frac{z}{\beta}\right)^k = \sum_{k\geq 0} 1 \cdot (1 + \frac{1}{\beta}) \cdots (1 + \frac{k-1}{\beta})\frac{1}{k!} z^k$$

項別に極限をとれることが §7.1 の命題で分かっているので

$$\lim_{\beta\to\infty} F(1, \beta; 1; z/\beta) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} z^k = e^z.$$

(4) やはり項別微分できることから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F(a, b; c; z) &= \sum_{k\geq 1} \frac{(a)_k(b)_k}{(1)_k(c)_k} kz^{k-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(1)_{k+1}(c)_{k+1}}(k+1)z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{a \cdot (a+1)_k \cdot b \cdot (b+1)_k}{(1)_k \cdot c \cdot (c+1)_k} z^k = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z).\end{aligned}$$

連絡事項
次回は Chap. XIV の超幾何函数を扱います。

以上です。