2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 26 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

6　線形微分方程式 2

今週で Chap. X はおしまいです。

問題についている ⋆ の数は難易度を表します。既に問題演習の発表をしている人がまた発表する場合は、できるだけ難しい問題に挑戦して下さい。

6.1　3 点の確定特異点を持つ線形微分方程式 [§10.7]

$u = u(z)$ に関する 2 階の線形微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \tag{6.1}$$

であって 3 つの確定特異点 a, b, c を持つものを考える。また**無限遠点** $z = \infty$ **は通常点**であるものとする。各特異点での特性指数を $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ とする。

問題 6.1 ($*$)**.** $w = 1/z$ と変数変換して (6.1) を $u(w)$ に関する微分方程式に書き換えると

$$\frac{d^2u}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{p(1/w)}{w^2}\right)\frac{du}{dw} + \frac{q(1/w)}{w^4}u = 0$$

となることを確認せよ。またこの式から無限遠点 $z = \infty$ が特異点でないための $p(z), q(z)$ の条件を求めよ。

問題 6.2 ($*$)**.** $p(z)$ は $z = a, b, c$ を 1 位の極に持つ。決定方程式を用いて、それぞれの留数が $1 - \alpha - \alpha', 1 - \beta - \beta', 1 - \gamma - \gamma'$ となることを確認せよ。

$p(z)$ の極と留数の条件、及び $p(z) = 2z^{-1} + O(z^{-2})$ $(z \to \infty)$ から $p(z)$ は

$$p(z) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \tag{6.2}$$

と決定する。また特性指数が次の関係式を満たすことも分かる。

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1. \tag{6.3}$$

この関係式は (2 階の場合の)**Fuchs の関係式**と呼ばれる。

問題 6.3 ($*$)**.** $p(z)$ の式 (6.2) 及び Fuchs の関係式 (6.3) を確認せよ。

$q(z)$ についても同様の議論で次の形に一意に決まる。

$$q(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}.$$

問題 6.4 ($*$)**.** $q(z)$ がこのようになることを確認せよ。

以上で $\mathbb{C}$ 上の 3 点に確定特異点をもつ 2 階の線形微分方程式が決定できた。実はこの議論は 3 点のうちの 1 点が ∞ でも構わない。そこで Riemann 球面の記号 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を使って

[*1] 2017/05/20 版, ver. 0.2.

定義. 3 つの確定特異点 $a, b, c \in \mathbb{CP}^1$ を持つ 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \frac{du}{dz} + \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right\} u = 0$$

の解 $u(z)$ の集合を次の記号で表す。

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

これを **Riemann 図式** (Riemann scheme) と呼ぶ。また方程式のことを **Riemann の P 方程式**、その解のことを **Riemann の P 関数**と呼ぶ。

問題 6.5 (∗ テキスト 207 頁の Example)**.** 微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{du}{dz} - abu = 0$$

の解集合が次の Riemann 図式で表せることを確認せよ。この方程式を **(Gauss の) 超幾何微分方程式**と呼ぶ。

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

6.1.1 Riemann 図式の変形 [§10.71]

まず Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ の一次分数変換について復習する。

問題 6.6 (∗∗)**.** Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ について解説せよ。

問題 6.7 (∗)**.** $\mathbb{CP}^1$ 上の任意の異なる 3 点 (a, b, c) について、一次分数変換

$$z \longmapsto \rho(z) := \frac{Az+B}{Cz+D}, \quad (AD-BC \neq 0)$$

であって $(\rho(a), \rho(b), \rho(c)) = (0, 1, \infty)$ となるものが一意に存在することを示せ。

問題 6.8 (∗)**.** 一次分数変換が $\mathbb{CP}^1$ 上の正則な全単射写像であることを示せ。

命題. (1)

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix} \tag{6.5}$$

(2) 1 次分数変換 $\rho(z)$ によって $w := \rho(z)$, $a' := \rho(a)$, $b' := \rho(b)$, $c' := \rho(c)$ と変換すると

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & w \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

命題の (2) は一次分数変換は $\mathbb{CP}^1$ 上の正則な全単射写像であることから直ちに従う。

問題 6.9 (∗)**.** この命題の (1) を証明せよ。

6.1.2 Gauss の超幾何微分方程式との関係 [§10.72]

前節の命題を繰り返し使うと

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}$$
$$= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & w \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}.$$

但し $w = (z-a)(c-b)/(z-b)(c-a)$. 従って

定理. Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上 3 つの確定特異点を持つ 2 階線形微分方程式 (6.1) は (6.5) と (6.6) で Gauss の超幾何微分方程式に変換できる。特に超幾何微分方程式の解 $F(a,b,c;z)$ を用いて (6.1) の解は次のように書ける。

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} F\Big(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha'; \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\Big).$$

7 超幾何関数 1

次週以降で本格的に扱う Chap. XIV の内容を少し説明します。一部でテキストの §2 の内容を用いますが、該当箇所のコピーを当日配布します。

7.1 超幾何級数

定義. 文字 x と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(x)_n \in \mathbb{Z}[x]$ を次で定める。

$$(x)_0 := 1, \quad (x)_1 := x, \quad (x)_n := x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

また $z \in \mathbb{C}$ に対し同じ式で $(z)_n \in \mathbb{C}$ を定める。

定義. $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$ とする。以下の級数を **(Gauss の) 超幾何級数**と呼ぶ。

$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n} z^n = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \cdots$$

命題. $|z| < 1$ で $F(a,b;c;z)$ は絶対一様収束する。特に $|z| < 1$ で $F(a,b;c;z)$ は正則関数を定める。

証明. $F(a,b;c;z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$ と係数をおくと

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} z\right| \to |z| \quad (n \to \infty)$$

なので、ダランベール (D' Alembert) の判定法により $|z| < 1$ で絶対一様収束する。 □

問題 7.1 (∗ テキスト 281 頁、§14.1 の本文と Example)**.** 以下の等式を示せ。

(1) $(1+z)^n = F(-n, \beta; \beta; -z)$.

(2) $\log(1+z) = zF(1,1;2;-z)$.

(3) $e^z = \lim_{\beta\to\infty} F(1, \beta; 1; z/\beta)$.

(4) $\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1, b+1; c+1; z)$.

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 6.1 (各 5 点). テキスト 205 頁 (§10.6) の Example 1–8 から好きなものを選んで解け。

レポート問題 6.2 (10 点、テキスト 22 頁、§2.36). 絶対収束に関するダランベールの判定法を説明せよ。

レポート問題 6.3 (10 点、テキスト 23–24 頁、§2.37, §2.38). $\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b) < \mathrm{Re}(c)$ ならば $|z| = 1$ でも $F(a, b; c; z)$ が絶対収束することを説明せよ。

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §10.7, §14.1.

以上です。