**2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 19 日分演習解答**[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

# 5 線形微分方程式 1

**問題 5.1.** 微分方程式の作用素の部分を $D := p_0 d_z^n + \cdots + p_{n-1} d_z + p_n$ と略記する。微分作用素 $d_z$ が線形であることから、$a, b \in \mathbb{C}$, $f, g$ を $S$ 上の正則関数として $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$. よって $D(f) = D(g) = 0$ なら $af + bg$ も解である。

**問題 5.2.** $u' = (v' - pv/2)e^{-\int p/2}$ 及び $u'' = (v'' - pv' + (p^2/4 - p'/2)v)e^{-\int p/2}$ から分かる。

**問題 5.3.** 帰納法で示す。$n = 0$ の場合は $\mu$ の取り方から自明。$n > 0$ なら $v_n(z)$ の定義と帰納法の仮定から

$$|v(z)| \leq \left| \int_b^z |t - z|\,|J(t)|\,|v_{n-1}(t)| dt \right| \leq \frac{\mu M^n}{(n-1)!} \left| \int_b^z |t - z|^{2n-1} dt \right| \leq \frac{\mu M^n |z - b|^{2n}}{2 \cdot n!} < \frac{\mu M^n |z - b|^{2n}}{n!}.$$

**問題 5.4.** 略。

**問題 5.5.** 解の展開級数であることはそれぞれ $O(z^2)$ 及び $O(z^3)$ まで計算すれば確認できる。線形独立なことは最小次数が異なるので明らか。

**問題 5.6.** 例えば $(\cos z, \sin z)$. これが線形独立な解の組であることは明らかだから、§5.2.1 の定理より任意の基本解はこれの基底変換で書ける。

**問題 5.7.** $w := z - c$, $a_0 := 1$ とすると $u = \sum_{n \geq 0} a_n w^{\alpha+n}$. これから

$$wu' = \sum_{n \geq 0} (\alpha + n) a_n w^{\alpha+n}, \quad w^2 u'' = \sum_{n \geq 0} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n w^{\alpha+n}.$$

従って $w^2 u''$, $wPu'$, $Qu$ の $w^{\alpha+n}$ の係数はそれぞれ

$$(\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n, \quad \sum_{k=0}^n p_k a_{n-k} (\alpha_{n-k} + n - k), \quad \sum_{k=0}^n q_k a_{n-k}.$$

これらの和を $a_k$ について整理すると結論が得られる。

**問題 5.8.** $z = 0$ は確定特異点で、$P(z)$ 及び $Q(z)$ の係数は $p_0 = p_1 = \cdots = 0$ 及び $q_0 = 1/4 - m^2$, $q_2 = -1/4$, $q_1 = q_3 = q_4 = \cdots = 0$. 決定方程式は $\alpha(\alpha - 1) + 1/4 - m^2 = 0$ なので特性指数は $\alpha = 1/2 \pm m$. $p_1 = q_1 = 0$ から直ちに $a_1 = 0$. $n \geq 2$ だと $a_n$ を決める式は

$$a_n((\alpha + n)(\alpha + n - 1) + q_0) + a_{n-2} q_2 = 0 \quad (a_0 := 1).$$

ここで $(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + q_0 = 2n\alpha + n(n - 1) = n(n \pm 2m)$ に注意。特に $a_2$ を決める式は $(4\alpha + 2)a_2 + q_2 = 0$ となって

$$a_2 = \frac{-q_2}{2(2 \pm 2m)} = \frac{1}{16(1 \pm m)}.$$

$n \geq 3$ だと帰納法で次の結果が示せる。

$$a_{\mathrm{odd}} = 0, \quad a_{2n} = \frac{-q_2}{2n(2n \pm 2m)} a_{2n-2} = \cdots = \frac{1}{16^n n!} \frac{1}{(n \pm m)(n - 1 \pm m) \cdots (1 \pm m)}.$$

収束性の議論は省略する。

[*1] 2017/05/16 版, ver. 0.1.

**問題 5.9.** $w := z - c$ と略記する。$w^2u'' + wPu' + Qu = 0$ に $u = u_1v$ を代入すると $w^2(u_1'' + 2u_1'v' + v'') + wP(u_1'v + u_1v') + Qu_1v = 0$. ここで $u_1$ は $w^2u_1'' + wPu_1' + Qu_1 = 0$ を満たすので $w^2(2u_1'v' + v'') + Pu_1v' = 0$. この式を整理すると (5.3) を得る。

(5.3) を $v'' = -(2u_1'/u_1 + w^{-1}P)v'$ と書き直せば $v'' = \exp\int(-2u_1'/u_1 - w^{-1}P) = u_1^{-2}\exp(-\int w^{-1}P)$. もう一度積分して (5.4) の最初の等式を得る。

残りは自明なので省略。

**次回**

次回 5/26 は Chap. X の §10.7 を扱います。次々回 6/2 は Chap. XIV の超幾何函数を扱います。

**グループ学習のテーマ**

グループ学習のテーマの例です。テキスト (Whittaker-Watson) 以外の本の解説してもらっても構いません。

- $\Gamma$ 関数 [Chap. XII]
  - 基本性質: Weierstrass の無限積表示 [§12.1], Euler の無限積表示 [§12.11], 関数等式 [§12.14].
  - 積分表示: Euler の積分表示 [§12.2], Hankel の積分表示 [§12.22], Stirling の公式 [§12.33].
  - Beta 積分 [§12.4]: $\Gamma$ 関数との関係 [§12.41], Pochhammer 積分 [§12.43].
- Riemann $\zeta$ [Chap. XIII]
  - 基本性質: 積分表示 [§13.12], Hurwitz の公式 [§13.15], 関数等式 [§13.151],
- 超幾何微分方程式のモノドロミー
- Legendre 多項式 [Chap. XV]
  - 基本性質: Rodrugues の公式 [§15.11], Schläfli 積分 [§15.12], 微分方程式 [§15.13], 直交性 [§15.14].
  - Legendre 関数 [§15.2] の性質: 漸化式 [§15.21], 第 2 種 Legendre 関数 [§15.3]
- Bessel 関数 [Chap. XVII]
  - 基本性質 [§17.1], 微分方程式 [§17.11], 非整数の場合 [§17.2].
  - 第 2 種 Bessel 関数 [§17.6]
- Laplace 方程式と解の展開 [Chap. XVIII]
  - 球対称性がある場合の Legendre 関数による展開 [§18.31]
  - 円柱座標と Bessel 関数による展開 [§18.4]
- Jacobi の楕円関数 [Chap. XXII]

**参考書**

今日扱った線形微分方程式については、日本語の (やや advanced な) 微分方程式の本で詳しく扱っている良書がたくさんあります。ここでは参考書として

- 笠原晧司「微分方程式の基礎」数理科学ライブラリー 5、朝倉書店
- 高野恭一「常微分方程式」新数学講座、朝倉書店
- 福原満洲雄「常微分方程式」岩波全書、岩波書店

を挙げておきます。最初の 2 冊は比較的新しい本なのですが、3 冊目は入手困難かもしれません。

また特殊関数全般についても多くの日本語の良書があります。例えば

- 犬井鉄郎「特殊函数」岩波全書、岩波書店
- 森口・宇田川・一松「岩波数学公式 III 特殊函数」岩波書店

**以上です。**