2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 19 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5　線形微分方程式 1

今週と来週は Whittaker-Watson の Chap. X "Linear differential equations" を扱います。

問題についている $\star$ の数は難易度を表します。既に問題演習の発表をしている人がまた発表する場合は、できるだけ難しい問題に挑戦して下さい。

5.1　2 階の線形微分方程式 [Whittaker-Watson §10.1]

複素平面の領域 S 上有限個の点を除いて正則な関数 $p_0(z), p_1(z), p_2(z), \ldots, p_n(z)$ が与えられているとする。以下のような未知関数 $u(z)$ に関する微分方程式を n **階の線形微分方程式**と呼ぶ。

$$p_0(z)\frac{d^n u(z)}{dz} + p_1(z)\frac{d^{n-1}u(z)}{dz} + \cdots + p_{n-1}(z)\frac{du(z)}{dz} + p_n(z)u(z) = 0.$$

問題 5.1 ($\star$)**.** 線形微分方程式の解の集合が $\mathbb{C}$ 線形空間であることを示せ。

この §5 では (及びこの演習全体を通じて) 主に 2 階の線形微分方程式を考える。必要なら $p_0(z)$ で割って、S 上有限個の点を除いて正則な関数 $p(z), q(z)$ を係数とする次の形の方程式を考えればよい。

$$\frac{d^2u}{dz}(z) + p(z)\frac{du}{dz}(z) + q(z)u(z) = 0. \tag{A}$$

定義. $p(z)$ と $q(z)$ が共に正則な S 上の点を微分方程式 (A) の通常点 (ordinary point) と呼び、そうでない点を (A) の**特異点** (singular point) と呼ぶ。

注意. n 階の微分方程式についても通常点、特異点を同様に定義できる。

5.2　通常点の近傍での解 [§10.2]

$b \in S$ を 2 階線形微分方程式 (A) の通常点とする。O_b を中心 b で半径 r の開円盤であって、O_b のどの点も (A) の通常点であるものとする。O_b での (A) の解 $u(z)$ を求めたい。$z \in O_b$ として

$$u(z) = v(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_b^z p(t)dt\right)$$

と未知関数を $v(z)$ に変換すると

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)v = 0, \quad J(z) := q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp}{dz}(z) - \frac{1}{4}p(z)^2. \tag{B}$$

問題 5.2 ($\star$)**.** (B) を確認せよ。

O_b の任意の点は (A) の通常点なので、(B) の通常点でもある。そこで (B) の解を求めることにする。

定理. O_b 上の正則関数 $v_0(z), v_1(z), \ldots$ を

$$v_0(z) := a_0 + a_1(z-b), \quad v_n(z) := \int_b^z (t-z)J(t)v_{n-1}(t)dt \quad (n \geq 1)$$

[*1] 2017/05/19 版, ver. 0.4.

と帰納的に定義すると

$$v_n := \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$$

は O_b 上一様収束し、更に微分方程式 (B) の解である。

証明. ある $M, \mu > 0$ が存在して O_b の任意の点 z について $|J(z)| < M$, $|v_0(z)| < \mu$ となる。すると

$$|v_n(z)| \le \mu M^n |z-b|^{2n}/n! \le \mu M^n r^{2n}/n!. \tag{5.1}$$

最右辺の和 $\sum_{n=0}^{\infty} \mu M^n r^{2n}/n!$ は r を十分小さくとれば収束するから、優級数定理より $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ も O_b 上一様収束する。すると v_n の定め方から

$$\frac{dv_n}{dz}(z) = -\int_b^z J(t)v_{n-1}(t)dt, \quad \frac{d^2v_n}{dz^2}(z) = -J(z)v_{n-1}(z) \tag{5.2}$$

となる。これから $d^2v/dz^2 = -J(z)v(z)$ が従う。 □

問題 5.3 ($\star$)**.** (5.1) を確認せよ。

問題 5.4 ($\star$)**.** (5.2) 及び $d^2v/dz^2 = -J(z)v(z)$ を確認せよ。

5.2.1 解の唯一性 [§10.21]

定理. $A_0, A_1 \in \mathbb{C}$ を任意の定数とする。微分方程式 (A) の O_b における解 $u(z)$ で $u(b) = A_0$, $u'(b) = A_1$ となるものは (存在すれば) 一意。

証明. 方程式 (B) について議論すればよい。v_1, v_2 を (B) の解で $v_1(b) = v_2(b)$, $v_1'(b) = v_2'(b)$ なるものとすると $w(z) := v_1(z) - v_2(z)$ は次を満たす。

$$\frac{d^2w}{dz^2}(z) + J(z)w(z) = 0, \quad w(b) = w'(b) = 0.$$

これから帰納的に $(d^nw/dz^n)(b) = 0$ が言えるので Taylor 展開から O_b 上 $w(z) = 0$. よって $v_1(z) = v_2(z)$. □

以上二つの定理より

定理. 2 階の線形微分方程式 (A) について、通常点 $b \in S$ の近傍であって特異点を含まない近傍上で、任意の $A_0, A_1 \in \mathbb{C}$ に対し条件 $u(b) = A_0$, $u'(b) = A_1$ を満たす解 $u(z)$ が一意に存在する。

定義. 2 階線型微分方程式 (A) の 2 つの解 $u_1(z), u_2(z)$ が線形独立なとき、組 $(u_1(z), u_2(z))$ を微分方程式 (A) の**基本解** (fundamental system of solutions) という。

問題 5.5 ($\star$ テキスト 197 頁 Example 1)**.** 微分方程式

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + 3u/4 = 0$$

について、次の 2 つの級数 u_1, u_2 が ($z = 0$ の近傍での) 基本解の展開級数であることを確認せよ。

$$u_1 = 1 - \frac{3}{8}z^2 - \frac{21}{128}z^4 - \cdots, \quad u_2 = z + \frac{5}{24}z^3 + \frac{15}{128}z^5 + \cdots.$$

問題 5.6 ($\star$)**.** 微分方程式 $u'' + u = 0$ の ($z = 0$ の近傍での) 基本解を求めよ。

5.3 確定特異点 [§10.3]

定義. 領域 S 上の 2 階線型微分方程式 (A) について、特異点 $c \in S$ が**確定特異点** (regular point) であるとは $(z-c)p(z)$ と $(z-c)^2q(z)$ が c で正則であること、つまり $z = c$ が $p(z)$ の高々 1 位の極であり、かつ $q(z)$ の高々 2 位の極であることをいう。確定特異点でない (A) の特異点を**不確定特異点** (irregular point) という。

確定特異点 c の近傍での解を求めよう。まず正則関数 $P(z) := (z-c)p(z)$, $Q(z) := (z-c)^2 q(z)$ を

$$P(z) = \sum_{n\geq 0} p_n (z-c)^n, \quad Q(z) = \sum_{n\geq 0} q_n (z-c)^n$$

と Taylor 展開しておく。考えている方程式は

$$(z-c)^2 \frac{d^2u}{dz^2} + (z-c)P(z)\frac{du}{dz} + Q(z)u \tag{C}$$

と書ける。その解として次の形のものを考える。

$$u = (z-c)^\alpha \Big(1 + \sum_{n\geq 1} a_n (z-c)^n\Big).$$

この級数が解になるよう定数 $\alpha, a_1, a_2 \ldots$ を決めよう。(C) に代入して $(z-c)$ の各冪の係数を比較すると

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0 &= 0, \\
a_1\left((\alpha+1)^2 + (p_0-1)(\alpha+1) + q_0\right) + \alpha p_1 + q_1 &= 0, \\
a_2\left((\alpha+2)^2 + (p_0-1)(\alpha+2) + q_0\right) + a_1\left((\alpha+1)p_1 + q_1\right) + \alpha p_2 + q_2 &= 0, \\
&\vdots \\
a_n\left((\alpha+n)^2 + (p_0-1)(\alpha+n) + q_0\right) + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}\left((\alpha+n-k)p_k + q_k\right) + \alpha p_n + q_n &= 0.
\end{aligned}$$

問題 5.7 ($\star$)**.** これらの等式を確認せよ。

定義. 微分方程式 (A) の確定特異点 $z = c$ での**決定方程式** (indicial equation) とは、上記の等式で最初のもの

$$F(\alpha) := \alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0 = 0$$

のこと。その解を $z = c$ での**特性指数** (exponent) と呼ぶ。

特性指数 (のうちの 1 つ)$\alpha = \rho$ を決めれば、$F(\rho+n) \neq 0$ なら上記の等式から a_n が帰納的に決まる。つまり

補題. もし決定方程式 $F(\alpha) = 0$ の解 $\alpha = \rho_1, \rho_2$ が $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ を満たすなら、微分方程式 (A), 同じことだが (C), は以下のような異なる 2 つの形式解 u_1, u_2 を持つ。

$$u_1(z) = (z-c)^{\rho_1}\Big(1 + \sum_{n\geq 1} a_n (z-c)^n\Big), \quad u_2(z) = (z-c)^{\rho_2}\Big(1 + \sum_{n\geq 1} a'_n (z-c)^n\Big)$$

問題 5.8 ($\star\star$ テキスト 198 頁 Example)**.** $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とする。微分方程式 $u'' + \left((1/4 - m^2)z^{-2} - 1/4\right)u = 0$ には 2 つの級数解 $u_\pm(z) := z^{1/2\pm m}\left(1 + z^2/(16 \pm 16m) + \cdots\right)$ があることを確かめよ。またこれらの一般項を求め、両者とも任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で収束することを示せ。

実は更に

定理. 決定方程式の解 ρ_1, ρ_2 が $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ を満たすなら、$p(z), q(z)$ から定まる正の定数 M があって 2 つの形式解 $u_1(z), u_2(z)$ はともに $|z-c| < M$ で絶対一様収束する。特に $(u_1(z), u_2(z))$ は基本解となる。

この定理の証明はテキスト §10.31 に書かれているので、その解説をレポート問題 5.3 とする。

5.3.1　$\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ の場合 [§10.32]

上の定理が適用できない場合、即ち $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ の場合を考える。$\rho_1 - \rho_2 = s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定して構わない。ρ_1 に関しては上の議論が適用できるので、対応する級数解 $u_1(z)$ が存在して、$z = c$ の近傍で絶対一様収束する。

定理. $s \neq 0$ ならば微分方程式 (C) の基本解として $u_1(z)$ と次の形の $u_2(z)$ が取れる。

$$u_2(z) = g_s u_1(z)\log(z-c) + (z-c)^{\rho_2}\Big(-\frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n (z-c)^n\Big).$$

但し g_s 及び h_n 達は $u_1(z)$ 及び $P(z-c)$ から定まる定数である。

証明. $u_1(z)$ 以外の解を求めるため $u(z) = u_1(z)v(z)$ とすると、問題の方程式は次式に帰着する。

$$(z-c)^2\frac{d^2v}{dz^2}(z) + \left(2(z-c)^2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} + (z-c)P(z-c)\right)\frac{dv}{dz}(z) = 0. \tag{5.3}$$

この方程式の一般解は次のようかける。c を中心とする開円盤 O_c で $P(z-c)$ 及び $(z-c)^{-\rho_1}u_1(z)$ の特異点を含まないものを考える。$z \in O_c$ として、一般解は

$$\begin{aligned} v(z) &= A + B\int^z \frac{1}{u_1(x)^2}\exp\left(-\int^x \frac{P(y-c)}{y-c}dy\right)dx \\ &= A + B\int^z \frac{(x-c)^{-p_0}}{u_1(x)^2}\exp\left(-p_1(x-c) - \frac{1}{2}p_2(x-c)^2 - \cdots\right)dx \\ &= A + B\int^z (x-c)^{-p_0-2\rho_1}g(x)dx. \end{aligned} \tag{5.4}$$

但し A, B は任意の定数。$g(z)$ は O_c 上正則であり $g(c) = 1$ となるものである。そこで $g(z) = 1+\sum_{n\geq 1}g_n(z-c)^n$ とすると、$1 - p_0 = \rho_1 + \rho_2$ に注意して

$$\begin{aligned} v(z) &= A + B\int^z \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x-c)^n\Big)(x-c)^{-s-1}g(x)dx \\ &= A + B\left[-\frac{1}{s}(z-c)^{-s} - \sum_{n=1}^{s-1}\frac{g_n}{s-n}(z-c)^{n-s} + g_s\log(z-c) + \sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{g_n}{n-s}(z-c)^{n-s}\right]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

これを $u(z) = u_1(z)v(z)$ に代入して適宜 h_n を定義すると

$$u(z) = Au_1(z) + B\left[g_s u_1(z)\log(z-c) + \widetilde{u}(z)\right], \quad \widetilde{u}(z) = (z-c)^{\rho_2}\Big(-\frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\Big).$$

これから結論が得られる。 □

問題 5.9 ($\star$)**.** 上の証明の細部を確認せよ。特に (5.3) や (5.4) 及び (5.5) を確認せよ。

$s = 0$ の場合も同様の議論ができて

定理. $s = 0$ ならば微分方程式 (C) の基本解として $u_1(z)$ と次の形の $u_2(z)$ が取れる。但し h_n 達は $u_1(z)$ 及び $P(z-c)$ から定まる定数。

$$u_2(z) = u_1(z)\log(z-c) + (z-c)^{\rho_2}\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n.$$

レポート問題

レポート問題 5.1 (5 点、テキスト 197 頁の Example 2)**.** 次の微分方程式の基本解を 1 組見つけよ。問題 5.4 と同様に (適当な次数までの) 級数で求めればよいものとする。

$$(z-2)(z-3)u'' - (2z-5)u' + 2u = 0.$$

レポート問題 5.2 (15 点)**.** §5.3 の確定特異点での解の見つけ方を不確定特異点に適用するとどうなるか議論せよ。

レポート問題 5.3 (10 点)**.** テキスト §10.31(このプリントの §5.3 の定理の証明) を解説せよ。

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §§10.1–10.3.

以上です。