2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 12 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

4　楕円関数 3

問題 4.1. $\zeta(z) = z^{-1} + \sum'_{m,n} \left((z-\Omega_{m,n})^{-1} + \Omega_{m,n}^{-1} + z/\Omega_{m,n}^2\right)$ は極以外の点の近傍で一様収束するから項別積分できる。すると、積分定数 c を用いて

$$\log\sigma(z) = \log z + \sum_{m,n}{}' \left(\log(z-\Omega_{m,n}) + \frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right) + c$$

となる。両辺の指数関数を取って定数部分を C にまとめると

$$\sigma(z) = e^c z \prod_{m,n}{}' \left\{(z-\Omega_{m,n})\exp\Big(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\Big)\right\} = Cz\prod_{m,n}{}' \left\{\Big(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\Big)\exp\Big(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\Big)\right\}.$$

あとは $z \to 0$ での条件から $C = 1$ が言える。

問題 4.2. 式 (4.1) の z を $-z$ にすると、$\prod'_{m,n}$ の部分は $(m,n) \mapsto (-m,-n)$ と添え字を付け直せば不変であることが分かる。よって最初の z の項だけが変わって、$\sigma(-z) = -\sigma(z)$. 零点に関しては明らか。

問題 4.3. 前半は $\sigma(z+2\omega_k) = -\sigma(z)\exp(2\eta_k(z+\omega_j))$ $(\{k,j\} = \{1,2\})$ を繰り返し用いればよい。後半は $z = -m\omega_1 - n\omega_2$ を代入して σ 関数が奇関数であることを用いると $(-1)^{m+n+1}\exp(2mn(\eta_1\omega_2 - \eta_1\omega_2)) = 1$. 特に $m = n = 1$ とすると $2(\eta_1\omega_2 - \eta_1\omega_2) \in \pi i(2\mathbb{Z}+1)$. 従って $\eta_1\omega_2 - \eta_1\omega_2 \in (\pi i/2)\mathbb{Z}$.

問題 4.4. 略。

問題 4.5. 略。

問題 4.6. (1) $t - x_0 = 1/\tau$ より $dt = -dt/\tau^2$. これから $\int_{x_0}^{x} dt = \int_{\xi}^{\infty} d\tau/\tau^2$. よって

$$z = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2\sqrt{f(t)}} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2\sqrt{4A_3\tau^{-1} + 6A_2\tau^{-2} + 4A_1\tau^{-3} + A_0\tau^{-4}}}.$$

これから (4.3) が従う。
(2) $A_3 \neq 0$ は $f(t)$ が重根を持たないことから従う。(4.3) 式を $z = \int_s^{\infty} d\tau/\sqrt{g(\tau)}$ とかく。$d\tau = d\sigma/A_3$ に注意すると $z = \int_s^{\infty} d\sigma/\sqrt{A_3^2\, g(\tau)}$. あとは $A_3^2 g(\tau)$ を計算すればよいが

$$\begin{aligned} A_3^2\, g(\tau) &= A_3^2\left(4(\sigma - A_2/2)^3/A_3^2 + 6A_2(\sigma - A_2/2)^2/A_3^2 + 4A_1(\sigma - A_2/2)/A_3 + A_0\right) \\ &= (4\sigma^3 - 6A_2\sigma^2 + 3A_2^3\sigma - A_2^3/2) + (6A_2\sigma^2 - 6A_2^2\sigma + 3A_2^3/2) + (4A_1A_3\sigma - 2A_1A_2A_3) + A_0A_3^2 \end{aligned}$$

となって (4.4) を得る。
(3) 次の 2 式を比較する。

$$\begin{aligned} f(t) = f(t) - f(x_0) &= a_0(t^4 - x_0^4) + 4a_1(t^3 - x_0^3) + 6a_2(t^2 - x_0^2) + 4a_3(t - x_0), \\ f(t) &= A_0(t-x_0)^4 + 4A_1(t-x_0)^3 + 6A_2(t-x_0)^2 + 4A_3(t-x_0). \end{aligned}$$

t で微分して 4 で割ると

$$A_0(t-x_0)^3 + 3A_1(t-x_0)^2 + 3A_2(t-x_0) + A_3 = a_0t^3 + 3a_1t^2 + 3a_2t + a_3.$$

[*1] 2017/05/12 版, ver. 0.2.

$t = x_0$ での値を比較して $A_3 = a_0x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 3a_2x_0 + a_3$. 次に再び t で微分して 3 で割ると

$$A_0(t-x_0)^2 + 2A_1(t-x_0) + A_2 = a_0t^2 + 2a_1t + a_2.$$

$t = x_0$ での値を比較して $A_2 = a_0x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2$. もう一度 t で微分して 2 で割ると $A_0(t-x_0) + A_1 = a_0t + a_1$. これから $A_1 = a_0x_0 + a_1$, $A_0 = a_0$.

次に $3A_2^3 - 4A_1A_3$ を計算する。$f(x_0) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}3A_2^2 - 4A_1A_3 =&3(a_0x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2)^2 - 4(a_0x_0 + a_1)(a_0x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 3a_2x_0 + a_3)\\ =&3\left(a_0^2x_0^4 + 4a_0a_1x_0^3 + (4a_1 + 2a_0a_2)x_0^2 + 4a_1a_2x_0 + a_2^2\right)\\ &-4\left(a_0^2x_0^4 + 4a_0a_1x_0^3 + (3a_0a_2 + 3a_1^2)x_0^2 + (3a_0a_3 + 3a_1a_2)x_0 + a_1a_3\right)\\ =&-a_0(a_0x_0^4 + 4a_1x_0^3 + 6a_2x_0^2 + 12a_3x_0) + 3a_2^2 - 4a_1a_3 = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3 = g_2.\end{aligned}$$

また $2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2$ についても同様に

$$\begin{aligned}&2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2\\ =&2\big(a_0^3x_0^6 + 6a_0^2a_1x_0^5 + (4a_0^2a_2 + 11a_0a_1^2)x_0^4 + (a_0^2a_3 + 13a_0a_1a_2 + 6a_1^3)x_0^3 + (3a_0a_1a_3 + 3a_0a_2^2 + 9a_1^2a_2)x_0^2\\ &\quad + (a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)x_0 + a_1a_2a_3\big)\\ &-\big(a_0^3x_0^6 + 6a_0^2a_1x_0^5 + (12a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2)x_0^4 + (12a_0a_1a_2 + 8a_1^3)x_0^3 + (3a_0a_2^2 + 12a_1^2a_2)x_0^2 + 6a_1a_2^2x_0 + a_2^3\big)\\ &-\big(a_0^3x_0^6 + 6a_0^2a_1x_0^5 + (6a_0^2a_2 + 9a_0a_1^2)x_0^4 + (2a_0^2a_3 + 18a_0a_1a_2)x_0^3 + (6a_0a_1a_3 + 9a_0a_2^2)x_0^2\\ &\quad + 6a_0a_2a_3x_0 + a_0a_3^3\big)\\ =&(a_0a_1^2 - a_0^2a_2)x_0^4 + 4(a_1^3 - a_0a_1a_2)x_0^3 + 6(a_1^2a_2 - a_0a_2^2)x_0^2 + 4(a_1^2a_3 - a_0a_2a_3)x_0 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2\\ =&a_1^2(f(x_0) - a_4) - a_0a_2(f(x_0) - a_4) + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 = g_3.\end{aligned}$$

(4) $s = A_3\xi + A_2/2 = A_3/(x-x_0) + A_2/2$ より $x = x_0 + A_3/(s - A_2/2) = x_0 + A_3/(\wp(z) - A_2/2)$. これと $4A_3 = f'(x_0)$ 及び $12A_2 = f''(x_0)$ より結論を得る。

以上です。