2017 年度前期 数学演習 IX/X　5 月 12 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

4　楕円関数 3

今週は Whittaker-Watson の §§20.42–20.53 および §20.6 (447–454 頁) を扱います。これで Chap. XX はおしまいとします。

問題についている ⋆ の数は難易度を表します。既に問題演習の発表をしている人がまた発表する場合は、できるだけ難しい問題に挑戦して下さい。

4.1　σ 関数 [§20.42]

定義. 関数 $\sigma(z)$ を次の 2 条件を満たすものとして定義する。

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \zeta(z), \quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1.$$

問題 4.1 (⋆)**.** σ 関数は次式で与えられることを確認せよ。但し ${\prod'}_{m,n}$ は $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にわたる積を表す。

$$\sigma(z) = z{\prod_{m,n}}' \left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right)\right\} \tag{4.1}$$

$\wp$ 関数および ζ 関数の時の議論と同様にして、σ 関数が次の性質を満たすことが分かる。
(I) 式 (4.1) の右辺は (z について) 任意の有界領域で絶対一様収束する。
(II) $\sigma(z)$ は $\Omega_{m,n}$ を 1 位の零点とする奇関数である。

問題 4.2 (⋆)**.** 上記の性質 (II) を確認せよ。

4.1.1　$\sigma(z)$ の準周期性 [§20.421]

定理.

$$\sigma(z+2\omega_1) \;=\; -e^{2\eta_1(z+\omega_2)}\sigma(z), \quad \sigma(z+2\omega_2) \;=\; -e^{2\eta_2(z+\omega_1)}\sigma(z).$$

証明. 前回扱った等式 $\zeta(z+2\omega_1) = \zeta(z)+2\eta_1$ を積分して $\sigma(z+2\omega_1) = ce^{2\eta_1 z}\sigma(z)$. ここで $z=-\omega_1$ を代入し $\sigma(-\omega_1) = -\sigma(\omega_1)$ を用いると $\sigma(\omega_1) = -ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(\omega_1)$ となり、積分定数 c が $-e^{2\eta_1\omega_1}$ だと分かる。 □

ここまで調べてきた関数 $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ は **Weierstrass の関数**と総称される。これらと対応する三角関数類似をまとめると以下のようになる。

Weierstrass の関数	$\wp(z)$	$\zeta(z)$	$\sigma(z)$
三角関数	$1/\sin^2(z)$	$\cot(z)$	$\sin(z)$

問題 4.3 (⋆ 448 頁の Example 1)**.** $m,n \in \mathbb{Z}$ に対し等式

$$\sigma(z+2m\omega_1+2n\omega_2) = (-1)^{m+n}\sigma(z)\exp\left((2m\eta_1+2n\eta_2)z+2m^2\eta_1\omega_1+4mn\eta_1\omega_2+2n^2\eta_2\omega_2\right)$$

が成立することを示し、更に $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1$ が $\pi i/2$ の整数倍であることを示せ。

[*1] 2017/05/19 版, ver. 0.5.

4.2 Weiestrass の関数による楕円関数の表示 [§20.5]

4.2.1 $\wp(z), \wp'(z)$ による表示 [§20.51]

命題. 楕円関数かつ偶関数である任意の複素関数 $\phi(z)$ は同じ周期を持つ $\wp(z)$ の有理式で書ける。より具体的に述べると、D を $\phi(z)$ の基本領域とし、$\pm a_1, \dots, \pm a_n$ を D 内の $\phi(z)$ の零点、$\pm b_1, \dots, \pm b_n$ を D 内の極とおくと、ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって

$$\phi(z) \;=\; c\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}.$$

証明. 関数 $\phi(z)^{-1}\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}$ は極を持たない楕円関数だから Liouville の定理より定数。この定数を c とすればよい。 □

定理. 任意の楕円関数は同じ周期を持つ $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式として書ける。

証明. 任意の楕円関数 $f(z)$ について $f(z)+f(-z)$ は楕円関数かつ偶関数なので、上の命題から有理式 $R_1(x)$ があって $f(z)+f(-z) = R_1(\wp(z))$. また $(f(z)-f(-z))/\wp'(z)$ も楕円関数かつ偶関数なので別の有理式 $R_2(x)$ があって $(f(z)-f(-z))/\wp'(z) = R_2(\wp(z))$. よって $f(z)$ は次のように書ける。

$$f(z) \;=\; R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z)).$$

□

4.2.2 ζ 関数による表示 [§20.52]

定理. $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする。基本周期内の極を $a_1, \dots, a_n$ とし、各 a_i での Laurent 展開を

$$f(z) = \frac{c_{k,r_k}}{(z-a_k)^{r_k}} + \cdots + \frac{c_{k,1}}{z-a_k} + (\text{正則部分})$$

と書く。この時ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって、$f(z)$ は Weierstrass の ζ 関数を用いて次のように表せる。

$$f(z) = c + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-1)}(z-a_k).$$

問題 4.4 ($\star\star$)**.** この定理の証明を解説せよ。

4.2.3 σ 関数による表示 [§20.53]

定理. $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする。基本周期内の零点を重複を込めて $a_1, \dots, a_n$ とし、$b_1, \dots, b_n$ を基本周期内の極とする。この時テキスト §20.14 より $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$. すると、ある定数 $c \in \mathbb{C}$ があって

$$f(z) = c\prod_{r=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

問題 4.5 ($\star\star$)**.** この定理を解説せよ。

4.3 $(a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4)^{-1/2}$ の積分 [§20.6]

定理. 4 次式 $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ は重根を持たないものとする。x_0 を $f(x)$ の根とし、平方根の逆数の積分

$$z = \int_{x_0}^{x} f(t)^{-1/2}dt,$$

を考える。もし

$$g_2 := a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad g_3 := a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4$$

に対応した $\wp(z)$ が存在するなら、x を次のように $\wp(z)$ の有理関数で表せる。

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)}{4\wp(z) - f''(x_0)/6}.$$

証明. $f(t)$ を $t = x_0$ で Taylor 展開して係数 $A_0, \dots, A_3$ を

$$f(t) = 4A_3(t-x_0) + 6A_2(t-x_0)^2 + 4A_1(t-x_0)^3 + A_0(t-x_0)^4 \tag{4.2}$$

とおく。$\tau := (t-x_0)^{-1}$, $\xi := (x-x_0)^{-1}$ とすると

$$z = \int_\xi^\infty (4A_3\tau^3 + 6A_2\tau^2 + 4A_1\tau + A_0)^{-1/2} d\tau. \tag{4.3}$$

仮定より $A_3 \neq 0$ であることに注意して、$\tau = A_3^{-1}(\sigma - A_2/2)$, $\xi = A_3^{-1}(s - A_2/2)$ と変数変換すると

$$z = \int_s^\infty \left(4\sigma^3 - (3A_2^2 - 4A_1A_3)\sigma - (2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2)\right)^{-1/2} d\sigma. \tag{4.4}$$

ここで次の等式 (4.5) に注意すると、前回の結果が使えて $s = \wp(z)$ が分かる。

$$3A_2^2 - 4A_1A_3 = g_2, \quad 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 = g_3 \tag{4.5}$$

最後に $x = x_0 + A_3/(s - A_2/2)$ で変数を元に戻すと結論を得る。 □

問題 4.6 ($\star$)**.** 上記の証明で省略した部分を補え。特に

(1) 等式 (4.3) を確かめよ。

(2) 等式 (4.4) を確かめよ。

(3) 式 (4.2) の A_i 達を a_i 達で書き表し、等式 (4.5) を確かめよ。

(4) 最後の「変数を元に戻すと結論を得る」の部分を確かめよ。

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。
分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 4.1 (5 点、450 頁の Example)**.** 楕円関数の ζ 関数による展開定理 (§4.2.2) の議論を真似して以下の等式[*2]を示せ。

$$\wp^2(z) = \frac{1}{6}\wp''(z) + \frac{1}{12}g_2$$

レポート問題 4.2 (5 点、451 頁の Example 1)**.** 次の等式を証明せよ。

$$\wp(z) - \wp(w) = -\frac{\sigma(z+w)\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w)}.$$

レポート問題 4.3 (5 点、451 頁の Example 2)**.** 次の等式を証明せよ。

$$\zeta(z+w) - \zeta(z) - \zeta(w) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}.$$

レポート問題 4.4 (5 点、451 頁の Example 5)**.** 次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned}
&\sigma(z+a)\sigma(z-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c)\\
&+\sigma(z+b)\sigma(z-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a)\\
&+\sigma(z+c)\sigma(z-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b) = 0.
\end{aligned}$$

[*2] 左辺にミスプリントがありました。ver. 0.5 で訂正しました

レポート問題 4.5 (10 点、452 頁の Example). $u(z), v(z), w(z)$ を同じ周期を持つ 2 位の楕円関数とする。この時、一般の u, v, w について[*3]、次の形の 2 つの独立な (代数的) 関係式

$$Auvw + Bvw + Cwu + Duv + Eu + Fv + Gw + H = 0,$$
$$A'uvw + B'vw + C'wu + D'uv + E'u + F'v + G'w + H' = 0$$

が存在することを示せ。ここで $A, B, \ldots, H'$ は定数。

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §§20.42–20.6.

次回以降

次回の 2 コマ目の間に中間アンケートを実施します。

次回と次々回は Chap. X Linear differential equations (線形微分方程式) を扱います。コピーは今回配布します。

単位と成績について

特に単位取得の必要条件について、初回に配布した資料と webpage の説明とが一致していなかったので、改めてここで説明します。今のところ

(出席 7 回以上) かつ (グループ学習の発表 1 回)

を単位取得の必要条件とする予定です。
出席については、発表またはレポート提出でその回は出席とします。

7 月のグループ学習と発表について

グループ学習の発表については詳細未定ですが、テキストの Part II(初回に配布した目次参照) に挙がっている特殊函数の中から、1 つ発表するものを 6 月末までに各自決めておいて下さい。函数ごとにグループ分けするつもりです。
なお、テキストとは全く別のトピックを扱っても構いませんが、その場合は事前に相談に来てください。

以上です。

[*3] 例外的な場合を除く、といった意味です。