2017 年度前期 数学演習 IX/X　4 月 28 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3 楕円関数 2

問題 3.1. $\wp$ 関数の時の議論をまねて計算すると $(d\zeta/dz)^2 = 4(\zeta^3 - \zeta^2)$. ここで ($\wp(z)$ が $1/\sin^2 z$ の類似であったことを思い出して) $\zeta(z) = 1/\sin^2 u$ で $u = u(z)$ を定義する。$y(u) := 1/\sin^2 u$ が $(dy/du)^2 = 4(y^3 - y^2)$ を満たすことから $(du/dz)^2 = 1$. よって積分定数 α を用いて $\zeta = 1/\sin^2 u = 1/\sin^2(\pm z + \alpha)$ と書ける。最後に $1/\sin^2 z$ が偶関数であることを用いて $\pm\alpha$ を α と書き直して結論を得る。

問題 3.2. (1) (A, B) に関する連立方程式 (3.2) の係数行列は $\begin{pmatrix} \wp(u) & 1 \\ \wp(v) & 1 \end{pmatrix}$ で、$\wp(u) \neq \wp(v)$ なら階数が 2. よって解 (A, B) が一意性に存在する。$u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ かつ $\wp(u) = \wp(v)$ なら z に関する 2 位の楕円関数 $\wp(z) - \wp(u)$ の零点を考えることで $w = -u - v \in \Omega$ となり、$\wp(z)$ は w では定義されていないから、この問題では考えなくてよい。
(2) 状況を整理すると、$(A, B) \in \mathbb{C}^2$ が既に与えられていて、$AX + B = Y$ を満たす (X, Y) が $(\wp(u), \wp'(u))$, $(\wp(v), \wp'(v))$, $(\wp(w), \wp'(w))$ の 3 組存在する。これは $\mathbb{C}^2$ の 2 つのベクトル $(\wp(u) - \wp(w), \wp'(u) - \wp'(w))$, $(\wp(v) - \wp(w), \wp'(v) - \wp'(w))$ が線形従属なことと同値である。更にこれは結論の行列式が 0 であることと同値。

問題 3.3. $A = (\wp'(u) - \wp'(v))^2/(\wp(u) - \wp(v))^2$ を代入して変数 (u, v) を (z, w) に置き換えればよい。

問題 3.4. $w \to z$ の極限を取ればよい。

問題 3.5. 加法定理の別形 (§3.2.1 の定理) と $\wp(-w) = \wp(w)$ 及び $\wp'(-w) = -\wp(w)$ から

$$\begin{aligned}\wp(z+w) + \wp(z-w) &= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) + \wp(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - 2\left(\wp(z) + \wp(w)\right). \\ &= \frac{1}{(\wp(z) - \wp(w))^2}\left(\frac{1}{2}(\wp'(z)^2 + \wp'(w)^2) - 2(\wp(z) + \wp(w))\left(\wp(z) - \wp(w)\right)^2\right)\end{aligned}$$

等式 $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ より

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(\wp(z) - \wp(w))^2}\left(2(\wp(z)^3 + \wp(w)^3) - \frac{g_2}{2}(\wp(z) + \wp(w)) - g_3 - 2(\wp(z) + \wp(w))\left(\wp(z) - \wp(w)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{(\wp(z) - \wp(w))^2}\left(2(\wp(z) + \wp(w))\wp(z)\wp(w) - \frac{g_2}{2}(\wp(z) + \wp(w)) - g_3\right).\end{aligned}$$

これから結論を得る。

問題 3.6. 省略します。

問題 3.7. (1) $e_1 = e_2$ なら $\wp(\omega_1) = \wp(\omega_2) = e_1$ $\wp(z) - e_1$ が基本領域内に 2 つの異なる零点 ω_1, ω_2 を持つことになる。それぞれ 2 位以上の零点であることは分かっているので、基本領域内の零点の位数の和が 4 以上になり、これは和が $\wp(z)$ の位数が 2 であることと矛盾する。よって $e_1 \neq e_2$. $e_2 \neq e_3 \neq e_1$ も同様。
微分方程式に $z = \omega_1$ を代入すれば $\wp'(\omega_1) = 0$ と $\wp(\omega_1) = e_1$ から $4e_1^3 - g_2 e_1 - g_3 = 0$. e_2, e_3 についても同様。
(2) $4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)$ より従う。

問題 3.8. 加法定理の別形を $z + \omega_1$ に適用して $\wp(\omega_1) = e_1$, $\wp'(\omega_1) = 0$ を用いると

$$\wp(z + \omega_1) = \frac{1}{4}\frac{\wp'(z)^2}{(\wp(z) - e_1)^2} - \wp(\omega_1) - e_1.$$

[*1] 2017/04/28 版, ver. 0.3.

ここで $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ を用いて式を整理すると

$$\wp(z+\omega_1) = \frac{(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)}{\wp(z)-e_1} - \wp(z) - e_1 = \frac{e_1^2-(e_2+e_3)\wp(z)+e_2e_3}{\wp(z)-e_1}.$$

$e_1+e_2+e_3=0$ を 2 回用いて

$$\wp(z+\omega_1) = \frac{e_1^2+e_1\wp(z)+e_2e_3}{\wp(z)-e_1} = \frac{2e_1^2+e_2e_3}{\wp(z)-e_1}+e_1 = \frac{e_1^2-e_1(e_2+e_3)+e_2e_3}{\wp(z)-e_1}+e_1.$$

これから結論を得る。

問題 3.9. 前半は問題 3.8 で $z=-\omega_1/2$ として $\wp(-\omega_1/2)=\wp(\omega_1/2)$ を使って 2 次方程式を解けばよい。後半は (問題 3.8 で ω_1 と ω_2 を入れ替えて示すことができる) $z+\omega_2$ に関する等式

$$\wp(z+\omega_2) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp(z)-e_2}$$

で $z=\omega_1/2$ とし、更に $\wp(\omega_1/2)$ に前半の結果を代入すると良い。$D := (e_2-e_1)(e_2-e_3)$ とすれば

$$\begin{aligned}\wp(\omega_1/2+\omega_2) &= e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{e_1-e_2\pm\sqrt{D}} = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{(e_1-e_2)^2-D}\left(e_1-e_2\mp\sqrt{D}\right)\\ &= e_2 + \frac{e_3-e_2}{(e_1-e_2)-(e_1-e_3)}\left(e_1-e_2\mp\sqrt{D}\right) = e_1\mp\sqrt{D}.\end{aligned}$$

連絡事項

4/28 の Cafe David でのオフィスアワーは 16:00-16:30 の間だけです。
来週 5/5 は休日なので、次回は 5/12 です。次回の予習として Chap. XX の最後まで目を通しておいて下さい。

以上です。