

2017 年度前期 数学演習 IX/X 4 月 28 日分演習/レポート問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3 楕円関数 2

先週に引き続き Whittaker-Watson の Chapter XX を読み進めていきます。今日の目標は §§20.221–20.411 (429–447 頁) を読み終えることです。

3.1 \wp 関数の積分公式 [Whittaker-Watson §20.221]

$g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ とする。次の積分で定まる ζ の関数 z を考える。

$$z(\zeta) := \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2t - g_3)^{-1/2} dt.$$

但し積分路は $4t^3 - g_2t - g_3$ の零点をよけるものとする。両辺を z で微分することで

$$(d\zeta/dz)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3. \quad (3.1)$$

これは Weierstrass の \wp 関数 $\wp(z)$ の満たす微分方程式に他ならない。よって前回プリント §2.2.2 の最後の問より、もし $g_2 = 60 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 = 140 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-6}$ と書けるなら、 ζ は次の形になる。

$$\zeta = \wp(z + \alpha)$$

但し α は積分定数。 $\zeta \rightarrow \infty$ で $z \rightarrow 0$ となるから α は $\wp(z)$ の零点。よって $\alpha = \Omega_{m,n}$ と書ける。

問題 3.1. 次の積分を考える。

$$z(\zeta) := \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - 4t^2)^{-1/2} dt.$$

この時 $\zeta = 1/\sin^2(z + \alpha)$ と書けることを示せ。

3.2 \wp 関数の加法定理 [§20.3]

この節では \wp 関数の性質を調べていく。前回と同様に $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ となるように取り、 $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, $\Omega := 2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}$, $g_2 := 60 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 := 140 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-6}$ と定める。

定理 (\wp 関数の加法定理). $u + v + w = 0$ なら

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

証明. $u, v \in \mathbb{C}$ として A, B に関する次の連立方程式を考える。

$$\wp'(u) = A\wp(u) + B, \quad \wp'(v) = A\wp(v) + B \quad (3.2)$$

この方程式は $\wp(u) \neq \wp(v)$ なら A, B を一意に決定する。つまり $u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ なら A, B が決まる。以下 u, v はこの条件を満たしているものとし、 A, B を上の方程式で決定したものとする。次に関数

$$\wp'(z) - A\wp(z) - B$$

を考える。この関数は Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極として持つ楕円関数である。従ってテキスト §20.13(前回プリントの §2.1.3) よりこの関数は基本領域内に重複度を込めて 3 つの零点を持つ。すると §20.14(前回レポート問題 2.2) より零点の和は周期格子 Ω 上にある。零点のうち 2 つは $\zeta = u, v$ だと分かるので、残り 1 つを w とすれば $w \equiv -u - v \pmod{\Omega}$ 。よって $-u - v$ 自身も零点である。つまり

$$\wp'(-u - v) = A\wp(-u - v) + B. \quad (3.3)$$

これと (3.2) から結論が得られる。 \square

問題 3.2. 上記の証明について

- (1) 方程式 (3.2) は $u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ なら A, B を一意に決定することを確認せよ。
- (2) 最後に書いてある「(3.3) と (3.2) から結論が得られる」を確認せよ。

3.2.1 加法定理の別形 [§20.31]

定理.

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

証明. 加法定理の証明中で関数 $\wp'(z) - (A\wp(z) + B)$ の零点が $z = u, v, -u - v$ であることを示した。従って関数 $\wp'^2(z) - (A\wp(z) + B)^2$ も $z = u, v, -u - v$ を零点に持つ。 $\wp(z)$ の満たす微分方程式 (3.1) を使うとこの関数は

$$4\wp^3(z) - A^2\wp^2(z) - (2AB + g_2)\wp(z) - (B^2 + g_3)$$

と書き直せる。よって 3 次方程式

$$4Z^3 - A^2Z^2 - (2AB + g_2)Z - (B^2 + g_3) = 0$$

が解 $Z = \wp(u), \wp(v), \wp(-u - v) = \wp(u + v)$ を持つことが分かった。すると解と係数の関係から

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u + v) = A^2/4.$$

A の値を (3.2) から求めて代入すると結論を得る。 \square

問題 3.3. 上記の証明の最後の部分「... 代入すると結論を得る」を確認せよ。

3.2.2 倍角公式 [§20.311]

命題. $2z \notin \Omega$ なら

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z).$$

問題 3.4. 前節の定理の極限をとってこの命題を証明せよ。

問題 3.5 (Whittaker-Watson 442 頁 Example 3). 次の等式を示せ。

$$\wp(z + w) + \wp(z - w) = \frac{(2\wp(z)\wp(w) - g_2/2)(\wp(z) + \wp(w)) - g_3}{(\wp(z) - \wp(w))^2}$$

問題 3.6 (Whittaker-Watson §20.312). テキストの §20.312 (Abel's method of proving the addition-theorem for $\wp(z)$) の内容を説明せよ。

3.2.3 定数 e_1, e_2, e_3 [§20.32]

定理. $\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2$ とおき、また $e_i := \wp(\omega_i)$ ($i = 1, 2, 3$) と定める。この時 e_i 達は互いに異なり、また次の 3 次方程式の解である。

$$4t^3 - g_2t - g_3 = 0.$$

証明. $\wp'(z)$ が奇関数であることから $\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(2\omega_1 - \omega_1) = -\wp'(\omega_1)$. 同様の議論から

$$\wp'(\omega_1) = \wp'(\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0.$$

$\wp'(z)$ は Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極に持つ楕円関数なので、テキスト §20.13 より $\wp'(z)$ は基本領域内に 3 つの零点を持つ。よって $z \equiv \omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{\Omega}$ となる点 z で零点は尽くされる。

次に関数 $\wp(z) - e_1$ を考える。 $\wp'(\omega_1) = 0$ より $z = \omega_1$ はこの関数の 2 位以上の零点である。 $\wp(z)$ は基本領域内に 2 つしか極を持たないので、テキスト §20.13 よりこの関数の零点は $z \equiv \omega_1 \pmod{\Omega}$ で尽くされる。 $\wp(z) - e_2, \wp(z) - e_3$ の零点も同様。これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う。

また $\wp(z)$ の満たす微分方程式 $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ から e_i 達が $4t^3 - g_2t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う。□

問題 3.7. (1) 上記の証明で「これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う」の部分および「 e_i 達が $4t^3 - g_2t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う」の部分の説明せよ。

(2) 以下の関係式を示せ。

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -g_2/4, \quad e_1e_2e_3 = g_3/4.$$

3.2.4 半周期ずらし [§20.33]

問題 3.8. 加法定理の別形式 (§3.2.1) から次の等式を示せ。

$$\wp(z + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1}$$

問題 3.9 (Whittaker-Watson §20.33 Example 1,2). 以下の等式を示せ。

$$\begin{aligned} \wp(\omega_1/2) &= e_1 \pm ((e_1 - e_2)(e_1 - e_3))^{1/2}, \\ \wp(\omega_1/2 + \omega_2) &= e_1 \mp ((e_1 - e_2)(e_1 - e_3))^{1/2}, \end{aligned}$$

3.3 準周期関数、特に関数 $\zeta(z)$ [§20.4]

定義. $\zeta(z)$ を $d\zeta(z)/dz = -\wp(z)$ 及び $\lim_{z \rightarrow 0} (\zeta(z) - z^{-1}) = 0$ を満たす関数として定める。

注意. (Riemann の ζ 関数と区別するために) この関数は「(Weierstrass の) ツェータ関数」と呼ばれます。

命題. $\zeta(z)$ は次のように書ける。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left(\frac{1}{z - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right).$$

証明. $\wp(z) - z^{-2}$ は (原点以外の) $\Omega_{m,n}$ の近傍を含まない領域上で一様収束するから項別積分できて

$$\zeta(z) - z^{-1} = - \int_0^z (\wp(z) - z^{-2}) dz = - \sum'_{m,n} \int_0^z \left(\frac{1}{z - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right) dz.$$

これから結論の等式を得る。□

系. $\zeta(z)$ は z の奇関数。

3.3.1 $\zeta(z)$ の準周期性 [§20.41]

命題. $\eta_i := \zeta(\omega_i)$ ($i = 1, 2$) と定めると

$$\zeta(z + 2\omega_i) = \zeta(z) + 2\eta_i \quad (i = 1, 2).$$

証明. $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$ を積分して $\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$. 但し $2\eta_1$ は積分定数。あとは $z = -\omega_1$ を代入して $\zeta(z)$ が奇関数であることを用いれば良い。 ω_2 についても同様。□

3.3.2 η_1 と η_2 の関係 [§20.411]

定理.

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2.$$

証明. C を基本領域の境界を反時計回りに向き付けた積分路として $\int_C \zeta(z)dz$ を考える。 $\zeta(z)$ は基本領域に 1 つ極を持ちその留数は 1 だから $\int_C \zeta(z)dz = 2\pi i$. 一方で積分を変形すると

$$\begin{aligned} \int_C \zeta(z)dz &= \int_t^{t+2\omega_1} (\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_2)) dz - \int_t^{t+2\omega_2} (\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_1)) dz \\ &= -2\eta_2 \int_t^{t+2\omega_1} dz + 2\eta_1 \int_t^{t+2\omega_2} dz. \end{aligned}$$

これから結論が得られる。 □

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの Examples や節末の Miscellaneous Examples に書かれている等式を証明してレポートにしても構いません。

講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 3.1 (5 点). テキスト 439 頁の Example 1 を (日本語で) 解説せよ。(テキストの最初の 3 行が主張で、 “[We have ... $v = 0.$]” と括弧で括られている部分はその証明になっています。)

レポート問題 3.2 (5 点). テキスト 439 頁の Example 2 に書かれている主張を証明せよ。

レポート問題 3.3 (5 点、441 頁の Example 1). 次の z の関数が Ω 及び $\pm w + \Omega$ の各点で正則なことを示せ。

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(z + w).$$

またこのこと Liouville の定理 (前回のプリント参照) から加法定理を証明せよ。

レポート問題 3.4 (5 点、441 頁の Example 3). Liouville の定理を用いて次の等式を示せ。

$$\frac{d}{dz} (\wp(z - a)\wp(z - b)) = \wp(a - b) (\wp'(z - a) + \wp'(z - b)) - \wp'(z - b) (\wp(z - a) - \wp(z - b)).$$

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の §§20.221–20.3.

引用の仕方

レポートを書くときに本を参照することは全く問題ありませんが、答案が参照している本の内容に基づいている場合は必ずその本を引用し、特に引用箇所を明示して下さい。

具体的にはこの上に「引用文献」にあるような説明して下さい十分です。

オフィスアワー及び次回

4/28 の Cafe David でのオフィスアワーは 16:00-16:30 までとさせていただきます。

5/5 は休日ですので、次回は 5/12 です。次回の予習として Chap. XX の最後まで目を通しておいて下さい。

以上です。