2017 年度前期 数学演習 IX/X　4 月 21 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2　楕円関数 1

問題 2.1. 周期に関する条件は明らかに微分しても保たれる。また微分すれば極の位数が高々 1 増えるだけだから特異点に関する条件も保たれる。

問題 2.2. $\csc^2 z = \sin^2 z = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(z - m\pi)^{-2}$ より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \csc^2\left(\frac{z - 2n\omega_2}{2\omega_1}\pi\right) - {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \csc^2\left(\frac{n\omega_2}{\omega_1}\pi\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z - 2n\omega_2}{2\omega_1}\pi - m\pi\right)^{-2} - {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n\omega_2}{\omega_1}\pi - m\pi\right) \\
&= \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^2 \left\{ \sum_{m,n} (z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} - {\sum_{n}}' \sum_{m} (2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} \right\} \\
&= \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^2 \left\{ {\sum_{m,n}}' (z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} + z^{-2} - {\sum_{m,n}}' (2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} + {\sum_{m}}' (2m\omega_1)^{-2} \right\} \\
&= \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^2 \left\{ z^{-2} + {\sum_{m,n}}' \left((z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} - (2m\omega_1 - 2n\omega_2)^{-2} \right) + \frac{2}{4\omega_1^2}\zeta(2) \right\} \\
&= \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^2 \left(\wp(z) + \frac{\pi^2}{12\omega_1} \right).
\end{aligned}
$$

これから結論が従う。

問題 2.3. (1) $\wp'(z) = -2\sum_{m,n}(z - \Omega_{m,n})^{-3}$ より

$$
\wp'(-z) \;=\; -2\sum_{m,n}(-z - \Omega_{m,n})^{-3} \;=\; 2\sum_{m,n}(z + \Omega_{m,n})^{-3} \;=\; 2\sum_{m,n}(z - \Omega_{m,n})^{-3} \;=\; -\wp'(z).
$$

但し 3 番目の等号で running index (m, n) を $(-m, -n)$ に置き換えて $\Omega_{-m,-n} = -\Omega_{m,n}$ を用いた。よって $\wp'(z)$ は奇関数。また $\wp(z)$ は奇関数の積分だと分かるから偶関数。
(3) $\Omega_{m,n} - 2\omega_1 = \Omega_{m-1,n}$ に注意して

$$
\wp'(z + 2\omega_1) \;=\; -2\sum_{m,n}(z + 2\omega_1 - \Omega_{m,n})^{-3} \;=\; -2\sum_{m,n}(z - \Omega_{m-1,n})^{-3} \;=\; -2\sum_{m,n}(z - \Omega_{m,n})^{-3} \;=\; \wp'(z).
$$

同様に $\wp'(z + 2\omega_2) = \wp'(z)$ も示せる。$\wp'(z)$ の特異点は極しかないから $\wp'(z)$ は楕円関数である。
(3) 積分定数 c を用いて $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z) + c$. ここで $z = -\omega_1$ とすると $\wp(\omega_1) = -\wp(\omega_1) + c$. (1) より $\wp(z)$ は偶関数だから $\wp(\omega_1) = -\wp(\omega_1)$. よって $c = 0$. これで $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$ が示せた。$\wp(z + 2\omega_2) = \wp(z)$ も同様。

問題 2.4. $(z - \omega)^{-2} = \sum_{k \geq 0}(k + 1)z^k\omega^{-k-2}$ より

$$
(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2} = 2z\omega^{-3} + 3z^2\omega^{-4} + 4z^3\omega^{-5} + 5z^4\omega^{-6} + \cdots .
$$

これと $\wp(z) - z^{-2}$ が偶関数であることを考慮すると

$$
\wp(z) - z^{-2} \;=\; {\sum_{m,n}}' \left((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2} \right) \;=\; 3z^2 {\sum_{m,n}}' \Omega_{m,n}^{-4} + 5z^4 {\sum_{m,n}}' \Omega_{m,n}^{-6} + \cdots .
$$

これから結論が得られる。

[*1] 2017/04/21 版, ver. 0.3.

問題 2.5. $\wp(z) = z^{-2} + g_2 z^2/20 + g_3 z^4/28$ を 3 乗して

$$\wp^3(z) \;=\; z^{-6} + \frac{3}{20} g_2 z^{-2} + \frac{3}{28} g_3 + O(z^2).$$

同様に $\wp'(z) = -2z^{-3} + g_2 z/10 + g_3 z^3/7$ から

$$\wp'^2(z) \;=\; 4z^{-6} - \frac{2}{5} g_2 z^{-2} - \frac{4}{7} g_3 + O(z^2).$$

よって

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) \;=\; -g_2 z^{-2} - g_3 + O(z^2).$$

問題 2.6. $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dz}$ と $(\frac{dy}{dz})^2 = (\frac{dy}{du})^2 = F(y)$ (但し $F(y) := 4y - 20g_2 y - g_3$) から従う。

連絡事項

4/21 と 4/28 の Cafe David でのオフィスアワーはお休みです。必要ならメールでアポイントメントを取ってください。

以上です。