2017 年度前期 数学演習 IX/X　4 月 21 日分演習/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2　楕円関数 1

先週配布した Whittaker-Watson の Chapter XX を読み進めていきます。今日の目標は §§20.1–20.22 (429–437 頁の §20.221 の手前まで) を終えることです。

2.1　二重周期関数 [Whittaker-Watson §20.1]

定義. ω_1, ω_2 を 0 でない複素数であって $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ を満たすものとする。解析関数 $f(z)$ は

$$f(z+2\omega_1) = f(z), \quad f(z+2\omega_2) = f(z)$$

が (定義域上に z があれば常に) 成立する時**周期** $2\omega_1, 2\omega_2$ **の二重周期関数** (doubly-periodic function with periods $2\omega_1, 2\omega_2$) と呼ばれる。特に極以外の特異点をもたない二重周期関数を**楕円関数** (elliptic function) と呼ぶ。

問題 2.1. $f(z)$ が楕円関数なら $f'(z)$ も楕円関数であることを確認せよ。

2.1.1　周期格子 [§20.11]

以下 $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする。

定義. $f(z)$ の**周期格子** (period lattice) とは以下の $\mathbb{C}$ の部分集合のことである。

$$2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z} \ = \ \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

注意. (1) 周期の定義から周期格子上の任意の点 ω, つまり $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ とかける ω について $f(z+\omega) = f(z)$.
(2) 周期格子は (加法に関して)$\mathbb{C}$ の部分加群であり、また $\mathbb{C}$ の離散部分空間である。格子 (lattice) という言葉はこの 2 つの性質を反映したもの。

定義. 複素平面上の平行四辺形であって頂点がある $z \in \mathbb{C}$ を用いて $z, z+2\omega_1, z+2\omega_1+2\omega_2, z+2\omega_2$ と書けるものであり、更にその周上に極が位置しないものを**基本領域** (fundamental region) と呼ぶ。

注意. Whittaker-Watson では基本領域のことをセルと呼んでいる。彼らの定義を書いておくと
(1) $0, 2\omega_1, 2\omega_1+2\omega_2, 2\omega_2$ を頂点とする複素平面上の平行四辺形を基本周期四辺形 (fundamental period-parallelogram) と呼ぶ。
(2) 基本周期四辺形を平行移動して得られる平行四辺形であって周上に極が位置しないものをセル (cell) と呼ぶ。

2.1.2　楕円関数の簡単な性質 [§20.12]

引き続き $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする。

定理. (I) **1 つの基本領域の中にある** $f(z)$ **の極の数は有限個**。
(II) $f(z)$ が恒等的に 0 でなければ **1 つの基本領域の中にある** $f(z)$ **の零点の数は有限個**。
(III) **1 つの基本領域の中にある** $f(z)$ **の極での留数の総和は** 0。
(IV) **Liouville の定理: 基本領域内に極を持たない** $f(z)$ **は定数**。

[*1] 2017/04/28, ver. 0.6

証明. (I) Bolzano-Weierstrass の定理、即ち ($\mathbb{R}^n$ 内の) 有界点列は収束部分列を持つことから、もし無限個の極が基本領域 D 内に存在すれば極限点が D 内にある。しかしそれは孤立していない特異点であるから真性特異点であり、楕円関数の定義と矛盾する。
(Ⅱ) $1/f(z)$ に (I) を適用すればよい。
(Ⅲ) 基本領域の頂点を $t, t+2\omega_1, t+2\omega_1+\omega_2, t+2\omega_2$ とする。この順番で頂点が反時計回りにあると仮定して構わない。C を基本領域の周で定まる反時計回りの積分路とする。留数の総和は留数定理から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_t^{t+2\omega_1}+\int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2}+\int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2}+\int_{t+2\omega_2}^{t}\right\} f(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}(f(z)-f(z+2\omega_2))\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}(f(z)-f(z+2\omega_1))\,dz \;=\; 0-0 \;=\; 0.\end{aligned}$$

(Ⅳ) 基本領域 D 内で極を持たなければ $f(z)$ は $\overline{D}$ の各点で解析的なので、$|f(z)|$ は有界閉集合 $\overline{D}$ 上連続。よって $|f(z)|$ は最大値を持ち、特に有界。すると $\mathbb{C}$ 上で $|f(z)|$ は有界だから、Liouville の定理より $f(z)$ は定数。 □

2.1.3　**楕円関数の位数** [§20.13]

命題. 楕円関数 $f(z)$ と $c \in \mathbb{C}$ について、基本領域内の $f(z)=c$ の解の重複度を込めた個数は c によらない。

証明の準備として次の補題を用意する。この補題は留数定理から簡単に導くことができるのでレポート問題 2.1 とする。

補題 (§6.3)**.** C を複素平面上のある積分路、D をその内部の定める開領域とする。$f(z)$ を $\overline{D}$ 上正則な関数とする。$\phi(z)$ を D 上有限個の極を持ちそれ以外は正則な関数とする。また $\phi(z)$ は C 上正則でかつ零点ももたないと仮定する。$\phi(z)$ の D での零点を $a_1, a_2, \ldots$ とし、それらの重複度を $r_1, r_2, \ldots$ とする。$\phi(z)$ の D での極を $b_1, b_2, \ldots$ とし、それらの位数を $s_1, s_2, \ldots$ とする。この時

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz \;=\; \sum_i r_i f(a_i)-\sum_j s_j f(b_j).$$

証明. $g(z)$ を積分路 C 上とその内部で正則な関数とし、更に C 上零点を持たないと仮定する。留数定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz \;=\; (\text{零点の重複度を込めた個数}) - (\text{極の位数の総和}).$$

特に $g(z)=f(z)-c$, C を基本領域の周とすることで

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}dz \;=\; (f(z)=c\text{ の解の個数}) - (f(z)\text{ の極の位数の総和}).$$

しかし $f(z)$ は楕円関数だから $f(z+2\omega_1)=f(z+2\omega_2)=f(z)$ および $f'(z+2\omega_1)=f'(z+2\omega_2)=f'(z)$ が成立する。§2.1.2 の定理 (Ⅲ) と同様の議論によりこの積分が 0 になることが分かる。 □

定義. $f(z)=c$ の基本領域内での解の個数を楕円関数 $f(z)$ の**位数** (order) と呼ぶ。

注意. 特に $c=0$ とすれば $f(z)$ の位数は零点の個数であり、また定理の証明から極の位数の総和でもあることが分かる。

定理. 定数でない**楕円関数の位数は 2 以上**。

証明. 位数 1 の楕円関数があればそれは基本領域内に位数 1 の極を 1 つ持ち、その留数は 0 ではない。これは §2.1.2 の定理 (Ⅲ)、つまり留数の総和が 0 となることに矛盾する。 □

注意. この定理から (自明でない) 最も簡単な楕円関数は位数 2 の楕円関数であり、次の 2 種類が考えられる。
(i) 基本領域に位数 2 の極を 1 つ持つもの。
(ii) 基本領域に位数 1 の極を 2 つ持つもの。

2.2 $\wp$ 関数 [§20.2]

ω_1, ω_2 は 0 でない複素数であって ω_2/ω_1 が正の虚部を持つものとする。また $\sum'_{m,n}$ で $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にわたる和を表す。

定義 (Weierstrass の $\wp$ 関数)**.** 関数 $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2)$ を以下で定義する。

$$\wp(z) \;:=\; \frac{1}{z^2} + {\sum_{m,n}}' \left(\frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right).$$

簡単のため $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ とおけば $\wp(z) = z^{-2} + \sum'_{m,n}\bigl((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\bigr)$ となる。

注意. $\wp$ は「ペー」と読みます。

$|\Omega_{m,n}|$ が十分大きいような m,n に関しては $\wp(z)$ の和に現れる各項は $O(|\Omega_{m,n}|^{-3})$。これから実は $\wp(z)$ は極の近傍を除いて z に関して絶対一様収束することが分かる (レポート問題 2.3 参照)。よって $\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上 $z = \Omega_{m,n}$ を除いて正則である。そして $\Omega_{m,n}$ を 2 位の極に持つ。

問題 2.2 (§20.20, Example)**.** 次の等式を示せ。但し $\csc\theta := 1/\sin\theta$ 及び ${\sum'}_{n=-\infty}^{\infty} := \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}$.

$$\wp(z) \;=\; \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left[-\frac{1}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \csc^2\left(\frac{z - 2n\omega_2}{2\omega_1}\pi\right) - {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \csc^2\left(\frac{n\omega_2}{\omega_1}\pi\right) \right].$$

2.2.1 $\wp(z)$ の周期性とほかの性質 [§20.21]

$\wp(z)$ が楕円関数であることを示そう。そのために $\wp(z)$ の微分を考える。$\wp(z)$ は一様収束級数で定まる解析関数だから項別微分ができて、$\sum_{m,n} := \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ と書くと

$$\wp'(z) \;=\; -2\sum_{m,n}(z - \Omega_{m,n})^{-3}.$$

問題 2.3. (1) $\wp'(z)$ が奇関数であること、$\wp(z)$ が偶関数であることを示せ。
(2) $\wp'(z + 2\omega_1) = \wp'(z + 2\omega_2) = \wp'(z)$ を示し、$\wp'(z)$ が $2\omega_1, 2\omega_2$ を周期に持つ楕円関数であることを示せ。
(3) 得られた等式 $\wp'(z + 2\omega_1) = \wp'(z)$ の両辺を積分して (1) を上手く用いることで $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$ を導け。同様に $\wp(z + 2\omega_2) = \wp(z)$ を導け。

この問題と $\wp$ が極以外の特異点を持たないことから

定理. $\wp(z)$ **は** $2\omega_1, 2\omega_2$ **を周期とする楕円関数**である。

2.2.2 $\wp(z)$ の満たす微分方程式 [§20.22]

$\wp(z) - z^{-2}$ は $\sum'_{m,n}\bigl((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\bigr)$ と等しいことから $z = 0$ まわりで正則だと分かる。また §2.2.1 より偶関数である。$z = 0$ での値は級数の形から 0. 従って以下のように Taylor 展開できる。

$$\wp(z) - z^{-2} \;=\; \frac{1}{20}g_2 z^2 + \frac{1}{28}g_3 z^4 + O(z^6)$$

問題 2.4. 係数 g_2, g_3 が以下のように与えられることを示せ。

$$g_2 \;=\; 60{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;=\; 140{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-6}.$$

これから以下の展開を得る。

$$\begin{aligned} \wp(z) &= z^{-2} + \frac{1}{20}g_2 z^2 + \frac{1}{28}g_3 z^4 + O(z^6), \\ \wp'(z) &= -2z^{-3} + \frac{1}{10}g_2 z + \frac{1}{7}g_3 z^4 + O(z^5). \end{aligned}$$

問題 2.5. 次の等式を確認せよ。

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = O(z^2).$$

この問題から関数 $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3$ は原点 $z = 0$ において正則である。$\wp(z)$ が楕円関数だからこの関数も楕円関数で、$z = 0$ と周期格子に関して合同な点 $z = \Omega_{m,n}$ でも正則である。一方で $\wp(z)$ の定義からまたこの関数の極は $\Omega_{m,n}$ にしかありえない。以上より $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3$ は極を持たない楕円関数である。すると §2.1.2 の定理 (Ⅳ) からこの関数は定数である。$z = 0$ での値は 0 だから任意の $z \in \mathbb{C}$ について $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = 0$ となる。以上より

定理. $\wp$ 関数は次の微分方程式 (differential equation) を満たす。。

$$\wp'^2(z) \;=\; 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad g_2 \;:=\; 60\sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;:=\; 140\sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}.$$

逆に $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ が与えられたとして、関数 $y(z)$ に関する次の微分方程式を考える。

$$(y'(z))^2 \;=\; 4y^3(z) - g_2 y(z) - g_3. \tag{2.1}$$

補題. もし $g_2 = 60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$, $g_3 = 140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$ と書ければ、この微分方程式の解は以下のように書ける。

$$y(z) \;=\; \wp(z + \alpha \,|\, \omega_1, \omega_2) \quad (\alpha \text{ は積分定数})$$

証明. $y = \wp(u)$ を満たす u が任意の $y \in \mathbb{C}$ について存在する。これから $y(z) = \wp(u)$ を満たす関数 $u = u(z)$ が定まる。y の満たす微分方程式から $(du/dz)^2 = 1$ が得られるので $u = \pm z + \alpha$ と書ける。$\wp(z)$ が偶関数なので $y = \wp(\pm z + \alpha) = \wp(z \pm \alpha)$ となり、$\pm\alpha$ を α に置きなおすことで結論が得られる。 □

問題 2.6. この補題の証明にある "$(du/dz)^2 = 1$" を示せ。

レポート問題

ここにあげた問題だけでなく、テキストの節末にある Miscellaneous Examples に書かれている等式や主張を証明してレポートにしても構いません。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 2.1 (5 点)**.** §2.1.3 の補題を証明せよ。

レポート問題 2.2 (8 点)**.** テキストの §20.14 (Relation between the zeros and poles of an elliptic function) を和訳せよ。但し本文中に §6.3 とあるのは §2.1.3 の補題 (レポート問題 2.1) のこと。

レポート問題 2.3 (10 点)**.** α を正の実数とする。級数 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z + \Omega_{m,n})^{-\alpha}$ を考える。この級数は $\alpha > 2$ の時、$\mathbb{C}$ から周期格子を除いた領域でに絶対一様収束することを示せ。

レポート問題 2.4 (5 点)**.** $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ とし、関数 $f(z)$ が微分方程式 (2.1) を満たすものとする。$f(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{2n} c_{2n} z^{2n}$ と展開できると仮定すると、低次の係数 c_{2n} は以下のようになることを確認せよ。

$$c_2 = \frac{g_2}{2^2\cdot 5}, \quad c_4 = \frac{g_3}{2^2\cdot 7}, \quad c_6 = \frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}, \quad c_8 = \frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}, \quad c_{10} = \frac{g_2^3}{2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 13} + \frac{g_3^2}{2^4\cdot 7^2\cdot 13},$$
$$c_{12} = \frac{g_2^2 g_3}{2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}, \quad c_{14} = \frac{g_2^4}{2^8\cdot 3\cdot 5^3\cdot 13\cdot 17} + \frac{3g_2g_3^2}{2^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17}.$$

引用文献

Whittaker, Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition (Cambridge, 1962) の Chap. XX.

以上です。