2017 年度前期 数学演習 IX/X　4 月 14 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1 導入：複素数、収束性、連続関数

問題 1.1. 問題の訳だけ載せておきます。

(1) 複素数 $1+4i,\ 2+7i,\ 3+10i$ に対応した複素平面上の点が一直線上にあることを示せ。

(2) 以下の複素数に対応した (複素数平面上の) 点を通る放物線が存在することを示せ。

$$2+i,\ 4+4i,\ 6+9i,\ 8+16i,\ 10+25i.$$

問題 1.2. 3.34. Weierstrass による一様収束性の (十分) 条件

与えられた級数が一様収束するための必要ではないが十分な条件として次のようなものがある。(複素変数)z がある領域にある時、級数 $S = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \cdots$ の各項の絶対値が収束する正項級数 $T = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ の各項より小さいものと仮定する。ここで M_n は z によらない定数である。すると級数 S はその領域上で一様収束する。この主張は以下のように証明できる。まず級数 T が収束するので、任意の正の実数 ϵ に対しある自然数 n が存在して、T の n 項目以降の絶対値が ϵ で抑えられる。すると S の n 項目以降の絶対値も抑えられる。この n は z によらないので、S は一様収束している。

例. 任意の実数 z について級数 $\cos z + \frac{1}{2^2}\cos^2 z + \frac{1}{3^2}\cos^3 z + \cdots$ は一様収束する。実際、この級数の各項の絶対値は収束する正項級数 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ の各項で抑えられる。

問題 1.3. 5.4. Taylor の定理

$z=a$ の近傍で解析的な関数 $f(z)$ を考える。. C を z 平面において a を中心とする円であって $f(z)$ の特異点をその上と内側に含まないようなものとする。特に $f(z)$ は C 上とその内側の任意の点で解析的である。$z=a+h$ を C の内側の任意の点とする。Cauchy の積分定理より

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-a-h} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\left(\frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{(z-a)^2} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right) \\
&= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}.
\end{aligned}$$

z が C 上にあれば $\frac{f(z)}{z-a-h}$ の絶対値は z について連続関数だからある有限の実数 M で抑えられる。

従って

$$\left|\frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right| \le \frac{|h|^{n+1}}{2\pi}\frac{M\cdot 2\pi R}{R^{n+1}}.$$

但し R は円 C の半径。特に積分路の長さは $2\pi R$ であり、C 上の点 z について $R=|z-a|$ となっている。

最後の不等式の右辺は $n\to\infty$ で 0 に近づくので $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots$. これは次のように書き換えられる: $f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots$. これは Taylor の定理として知られているものである。ここで説明した証明は Cauchy によるものである。この証明から**冪級数の収束半径は、級数の表す関数の（原点に）最も近い特異点までの距離を下回らない**。

以上です。

[*1] 2017/04/14 版, ver. 1.0.