担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

同値関係と商集合

作成日: 11/20/2016　更新日: 12/02/2016　Version: 1.0　配布日: 12/08/2016

二項関係と同値関係

まず同値関係の復習から始める。

定義 1.

(1) R が集合 X における二項関係であるとは、任意の $x, y \in X$ に対して「x は関係 R で y に関係している」か、または「x は関係 R で y に関係していない」のどちらかのみが起こる場合をいう。「x は関係 R で y に関係している」ことを xRy と書く。

(2) 集合 X における二項関係 $\sim$ が同値関係であるとは、次の三つの条件が成り立つときをいう：
  - (a) (反射律) 任意の $x \in X$ に対して $x \sim x$。
  - (b) (対称律) 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ ならば $y \sim x$。
  - (c) (推移律) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$。

補足 1. 集合 X における二項関係 R が与えられたとき、

$$K_R := \{(x, y) \in X \times X \mid xRy\}$$

と直積集合 $X \times X$ の部分集合を定めることができる。逆に任意の $K \subset X \times X$ に対し

$$xR_K y \iff (x, y) \in K$$

と定めると R_K は X における二項関係になる。この意味で X における二項関係と $X \times X$ の部分集合とは同じものである。

問題 1. ある人が「同値関係の定義において反射律は必要ない」と主張している。その人の論法は以下のようなものであった。

> 対称律より $x \sim y$ なら $y \sim x$ である。よって $x \sim y$ と $y \sim x$ に推移律を用いて $x \sim x$ が成り立つ。つまり反射律は対称律と推移律から従う。

この議論が誤りであることを説明せよ。また、対称律と推移律は成り立つが反射律の成り立たない二項関係の例を挙げよ。

問題 2. 次の集合 X における二項関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。

(1) X を線形空間とし $V \subset X$ を部分空間とする。このとき $x, y \in X$ に対して「$x \sim y \iff x - y \in V$」と定義される二項関係 $\sim$.

(2) $X = \mathbb{Z}$ として $n \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する。このとき $x, y \in X$ に対して「$x \sim y \iff x - y \in n\mathbb{Z}$」と定義される二項関係 $\sim$.

(3) X を (空でない) 集合とし $A \subset X$ とする。$x, y \in X$ に対して「$x \sim y \iff x, y \in A$ または $x = y$」と定義される二項関係 $\sim$.

(4) X を n 次複素正方行列全体とする。$A, B \in X$ に対して「$A \sim B \iff$ ある正則行列 $P \in X$ が存在して $B = P^{-1}AP$」と定義される二項関係 $\sim$.

(5) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする。$X := V \setminus \{0\}$ とする。このとき $u, v \in X$ に対して「$u \sim v \iff$ ある $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$ が存在して $v = cu$」と定義される二項関係 $\sim$.

(6) X を実数列全体の集合 $X := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ とする。X の元を $\{x_n\}$ などと書き表す。$\{x_n\}, \{y_n\} \in X$ に対して「$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$」で定義される二項関係 $\sim$.

同値類と商集合

次に商集合や同値類を復習する。

定義 2. 以下では X は集合とし $\sim$ を X における同値関係とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$ とおく。$[x]$ を x の同値類という。また x を同値類 $[x]$ の代表元という。

(2) 同値類全体からなる集合を $X/\sim$ と書き同値関係 $\sim$ による商集合という。

(3) $x \in X$ に対して同値類 $[x] \in X/\sim$ を対応させる写像を $\pi : X \to X/\sim$ などと書き射影と呼ぶ。

問題 3. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $x \in X$ に対して $[x] \neq \emptyset$ を示せ。

(2) $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ を示せ。

(3) $x, y \in X$ に対して $[x] = [y] \iff x \sim y$ を示せ。

(4) 任意の $x, y \in X$ に対して $[x] = [y]$ または $[x] \cap [y] = \emptyset$ となることを示せ。

補足 2. 集合 X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとし $a \in X/\sim$ とする。このとき $a = [x]$ となる X の元 x は一般には一つとは限らない。従って、例えば X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ が与えられていても、$F([a]) := f(a)$ として写像 $F : X/\sim \to Y$ を定義することは一般には出来ない。実際、別の $\xi \in X$ で $[x] = [\xi]$ となるものを取って来たとき一般に $f(x) \neq f(\xi)$ なので $F([x]) \neq F([\xi])$, $[x] = [\xi] \in X/\sim$. つまり $[x] \in X/\sim$ での F の値 $F([x])$ が同値類 $[x]$ の代表元の取り方によってしまい F は写像ではなくなってしまう。

問題 4. 上記の設定で任意の $a,b \in X$ に対して $a \sim b$ ならば $f(a) = f(b)$ が成り立つとする。このとき $F([a]) := f(a)$ として写像 $F : X/{\sim} \to Y$ が定義出来ることを示せ。

補足 3. 一般に X の各元に対して定義されたある「対象」が各点の同値類の代表元の取り方によらずに定まっているとき、その「対象」は論理的整合性を持つ、well-defined であるなどと呼ばれる。このとき「対象」は商集合 $X/{\sim}$ の各点で定義されることになる。上記の問題 4 では「F は well-defined」となる。

問題 5. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間、V を X の部分空間とする。$u, v \in X$ に対し $u \sim v \iff u - v \in V$ と定義すると $\sim$ は X 上の同値関係である (問題 2(1) 参照)。

(1) $X/{\sim}$ に和とスカラー積を

$$[u] + [v] := [u+v], \quad a[u] := [au] \qquad ([u],[v] \in V/{\sim},\ a \in \mathbb{K})$$

で定めるとこれらは well-defined であり $X/{\sim}$ は線形空間となることを示せ。この線形空間を X/V と書くことにする。

(2) 以下 X を有限次元と仮定し、X の双対空間を X^* と書くことにする。つまり X^* は X 上の $\mathbb{K}$ への線形写像全体のなす線形空間である。

$$V^{\perp} := \{f \in X^* \,;\, f(w) = 0,\ \forall w \in V\}$$

とおく．このとき $V^{\perp}$ は X^* の部分空間であることを示せ。また $f \in V^{\perp}$ に対して

$$\varphi_f([u]) := f(u)$$

とおくと φ_f は X/V 上の $\mathbb{K}$ への線形写像であることを示せ。

(3) 対応 $f \mapsto \varphi_f$ は $V^{\perp}$ と $(X/V)^*$ の間の線形同型写像であることを示せ。

問題 6. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ をとる。$a,b \in \mathbb{Z}$ に対して $a \sim b \iff a - b \in n\mathbb{Z}$ とすると $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であった (問題 2(2) 参照。この同値関係 $a \sim b$ をしばしば $a \equiv b \pmod{n}$ と書き、a, b は n を法にして合同であるという)。商集合 $\mathbb{Z}/{\sim}$ を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書くことにする。

(1) 任意の $[a],[b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $[a]+[b] := [a+b]$, $[a][b] := [ab]$ とおく。これらの演算 (足し算と掛け算) は well-defined であることを示せ。

(2) $a \in \mathbb{Z}$ に対してある $b \in \mathbb{Z}$ で $[a][b] = [1]$ を満たすものが存在するためには $\gcd(a,n) = 1$ が成り立つことが必要十分であることを示せ。$[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ がこのような元 $[b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を持つとき、$[a]$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で逆元を持つといい $[b]$ を $[a]$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ での逆元という。

(3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の任意の元 $[a] \neq [0]$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で逆元を持つためには、n が素数であることが必要十分であることを示せ。

問題 7. $X := [0,1]$ を単位閉区間とし、また $A := \{0,1\}$ とおく。このとき $a,b \in X$ に対して「$a \sim b \iff a = b$ または $a,b \in A$」で定義される二項関係 $\sim$ は同値関係であった (問題 2(3) 参照)。これについて以下の問いに答えよ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。このとき写像 $f : X \to S^1$ を $f(t) := e^{2\pi i t}$ で定めると f は全射であることを示せ。

(2) 任意の $[a] \in X/\!\sim$ $(a \in X)$ に対して $F([a]) := f(a)$ とする。このとき F は $X/\!\sim$ から S^1 への写像として well-defined でありさらに全単射であることを示せ。

問題 8. 一般に実数直線 $\mathbb{R}$ 内の有界な閉区間 X に対して $C(X)$ で X 上の実数値連続関数全体の集合を表すとする。$C([0,2])$ 内の部分集合 I を次で定義する。

$$I := \{f \in C([0,2]) \mid f(x) = 0,\ 0 \le \forall x \le 1\}.$$

(1) I は実線形空間 $C([0,2])$ 内の部分空間であることを示せ。従って問題 2(1) にあるように $f, g \in C([0,2])$ に対して「$f \sim g \iff f - g \in I$」と定義すると、$\sim$ は $C([0,2])$ 上の同値関係である。特に商集合 $C([0,2])/\!\sim$ を考えることが出来る。

(2) $f \in C([0,2])$ に対して f を $[0,1]$ に制限した関数を φ_f と書く。このとき $\varphi_f \in C([0,1])$ であり対応 $f \mapsto \varphi_f$ は $C([0,2])$ から $C([0,1])$ への線形写像であることを示せ。

(3) 上記の対応 $f \mapsto \varphi_f$ は全射であることを示せ。

(4) 対応 $F : C([0,2])/\!\sim \to C([0,1])$, $F([f]) := \varphi_f$ は写像として well-defined であり、全単射な線形写像であることを示せ。

問題 9. 集合 X と Y, そして全射 $f : X \to Y$ が与えられているとする. X に二項関係 $\sim$ を $a, b \in X$ に対して「$a \sim b \iff f(a) = f(b)$」と定義する. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ.

(2) $F([x]) = f(x)$, $[x] \in X/\!\sim$ とおく. このとき F は $X/\!\sim$ から Y への写像として well-defined であることを示せ.

(3) 上で作った写像 $F : X/\!\sim \to Y$ は全単射であることを示せ.

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

おまけの問題: 実数の構成法

ここでは実数を有理数から「構成」する方法を (問題形式で) 説明する。ここでは Cantor による構成法を紹介する。なお「実数の連続性」についての表現は様々な同値命題が知られている。詳しくは例えば杉浦光夫著「解析入門 I」(東京大学出版会) を参考されたい。

有理数や有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は既知としよう。また二つの有理数には大小関係があることも既知とする。$a \in \mathbb{Q}$ に対してその絶対値 $|a|$ とは a が非負ならば $|a| := a$, a が負ならば $|a| := -a$ で定義される有理数である。

有理数からなる数列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるとは, 任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し、$n, m \geq N$ を満たす任意の自然数 n, m に対して $|x_n - x_m| < \varepsilon$ が成り立つものとする。また有理数列 $\{x_n\}$ が 0 に収束するとは、任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して $|x_n| < \varepsilon$ が成り立つこととする。($\varepsilon > 0$ を有理数とした理由は、我々はまだ実数を知らないからである。)

有理数列で Cauchy 列となるもの全体のなす集合を

$$X := \{\{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{Q},\ \{x_n\} \text{ は Cauchy 列}\}$$

とおく。X 上に二項関係 $\sim$ を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \{x_n - y_n\} \text{ は } 0 \text{ に収束する有理数列}$$

と定義する。

問題 10. 上記の二項関係 $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ。

また次の主張を以下で用いることになる。

問題 11. 任意の $\{x_n\} \in X$ に対し、ある有理数 $C > 0$ で $|x_n| \leq C$ が任意の自然数 n について成り立つものが存在することを示せ。

そこで $R = X/\!\sim$ とする。実は R が実数全体 $\mathbb{R}$ に一致する。これを順を追って見て行こう。

まず R が有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を含んでいるかどうかを考える。有理数からなる Cauchy 列 $\{x_n\} \in X$ に対してその同値類を $[x_n]$ と表示する。$[x_n] \in R$ である。R の元を単に x や r など一文字で表示することもある。

問題 12. $a \in \mathbb{Q}$ に対して $x_n = a$ (n は任意の自然数) で与えられる数列を $\{a\}$ と書くと $\{a\} \in X$ であることを示せ。また $a \in \mathbb{Q}$ に対して $\{a\}$ の同値類を $[a] \in R$ と書くと、写像 $\mathbb{Q} \ni a \mapsto [a] \in R$ は単射であることを示せ。

従って $\mathbb{Q} \subset R$ と考えて良いことが分かった。そこで $a \in \mathbb{Q}$ に対して a と $[a] \in R$ を同一視して単に $a \in R$ と書くことにする。

次に R の元の四則演算を定義しよう。R の二つの元 $[x_n], [y_n] \in R$ に対して

$$[x_n] + [y_n] := [x_n + y_n], \quad [x_n] \cdot [y_n] := [x_n y_n]$$

と定めたいが、これら和と積が well-defined であることは証明する必要がある。

問題 13. 上記の和と積が well-defined であることを示せ.

従って R は有理数全体 $\mathbb{Q}$ を部分集合として含み、足し算、引き算、掛け算が出来る集合であることが分かった。次に割り算を考えよう。

問題 14. $\{x_n\} \in X$ が $\{x_n\} \not\sim \{0\}$ であるためには、ある正の有理数 $\delta > 0$ とある自然数 n_0 が存在し任意の自然数 n に対して $n \geq n_0$ ならば $|x_n| > \delta$ となることが必要十分であることを示せ。ただし $\{0\}$ で 0 からなる数列を表した。

問題 15. $[x_n] \neq 0$ である任意の $[x_n] \in R$ に対してある $[y_n] \in R$ で $[x_n] \cdot [y_n] = 1$ となるものが存在することを示せ。

従って R の 0 以外の元は逆元を持つことが分かった。次に R の二つの元に対してその大小関係、つまり「順序」を定義しよう。

$[x_n] \in R$ に対して $0 < [x_n]$ であるとは、ある正の有理数 δ とある自然数 n_0 が存在し、$n \geq n_0$ ならば $x_n > \delta$ が成り立つことと定義する。

また $[x_n], [y_n] \in X$ に対して $[x_n] \leq [y_n]$ とは、$[x_n] = [y_n]$ かまたは $0 < [y_n] - [x_n]$ が成り立つことと定義する。但し $-[x_n] := [-x_n]$ とした。

問題 16. 上記の二項関係 $<$ は代表元の取り方によらず well-defined であることを示せ。

問題 17. $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し、有理数の通常の意味で $a < b$ であることと、a, b を R の元と考えたときの $a < b$ とは同値であることを示せ。

つまり有理数全体集合の上の「大小関係」が, 自然に R まで拡張されていると考えられる。

問題 18. R 上の二項関係 $\leq$ は次の性質を満たすことを示せ。但し $r, s, t \in R$ とする。

(1) $r \leq r$. $r \leq s$ かつ $s \leq r$ ならば $r = s$. $r \leq s$ かつ $s \leq t$ ならば $r \leq t$.

(2) $r \leq s$ ならば $r + t \leq s + t$.

(3) $0 \leq r$ かつ $0 \leq s$ ならば $0 \leq rs$.

(4) $r = s$, $r < s$, $s < r$ のうち一つ、しかも唯一つが成り立つ.

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

次に連続公理について考える。通常、連続公理とは「空でない上に有界な任意の部分集合 $A \subset R$ に対して A の上限が R の中に存在する」と述べられる。ここでは連続公理と同値である「アルキメデスの原理」と「任意の Cauchy 列は収束列である」を示すことにする (同値性については前述の杉浦光夫著「解析入門 I」を参照)。

まず R の元 r に対して絶対値を以下で定義する。

$$|r| := \begin{cases} r & r > 0 \text{ のとき} \\ 0 & r = 0 \text{ のとき} \\ -r & r < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

但し $r > 0$ は上記で定義した R における二項関係 $>$ によるものである。

問題 19. 上で定義した $r \in R$ の絶対値が r の代表元の取り方によらず well-defined であることを示せ.

問題 20. $r = [r_n] \in R$ 及び $a > 0$ なる $a \in \mathbb{Q}$ を取る。このとき $|r| < a$ であるためには、ある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 n_0 が存在して、任意の $n \geq n_0$ に対して $|r_n| < a - \delta$ が成り立つことが必要十分であることを示せ。

また上記の絶対値は、やはり実数の場合と同様に三角不等式を満たす。

問題 21. 任意の $r, s \in R$ に対して $|r + s| \leq |r| + |s|$ となることを示せ。

アルキメデスの原理とは絶対値に関する次のような公理である。

問題 22.

(1) 二つの有理数 $a, b > 0$ に対して, ある自然数 K が存在して $Ka > b$ となることを示せ。

(2) R に対してアルキメデスの原理が成り立つこと、つまり $r, s \in R$, $r > 0$, $s > 0$ とするときある自然数 K が存在して $Kr > s$ が成り立つことを示せ。

アルキメデスの原理から次のような事実が従う。

問題 23. 任意の $r, s \in R$, $r < s$ に対して $r < a < s$ を満たす有理数 $a \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ。
(ヒント: $s - r > 0$ だからアルキメデスの原理から $1 < q(s - r)$ となる自然数 q が取れる。再びアルキメデスの原理を qr と 1 に用いて、$qr < n$ となる自然数 n が取れる。この性質を満たす自然数 n のうち最小のものを p とする。$a := p/q$ が題意を満たすことを示す。)

最後に R 内の Cauchy 列について考える。

R 内の点列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset R$ が Cauchy 列であるとは、任意の $\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$ に対してある自然数 K が存在し、$k, l \geq K$ ならば $|r_k - r_l| < \varepsilon$ が成り立つものと定義する。

また R 内の点列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $k \to \infty$ のとき $r \in R$ に収束するとは、任意の $\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$ に対してある自然数 K が存在して、$k \geq K$ ならば $|r_k - r| < \varepsilon$ が成り立つこととする。ここで $|r_k - r| < \varepsilon$ の意味は R 内の元に対して定義された絶対値と不等号を用いている。しかし問題 23 より $\varepsilon > 0$ は有理数を十分である。

問題 24. 任意の $r = [x_n] \in R$ に対して $x_n \in \mathbb{Q}$ を R の元と考える。このとき R 内の点列 $\{x_n\}$ は R 内で r に収束することを示せ。

問題 23 と問題 24 から次を示すことができる。

問題 25. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ を R 内の任意の Cauchy 列とする。

(1) 自然数 k に対して $r_l = r_k$ なる自然数 l が無限個存在すると仮定する。このとき点列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $r := r_k$ に収束することを示せ。そこで以後、任意の k に対して $r_l = r_k$ となる l は有限個であると仮定する。

(2) 任意の k に対して自然数 $l(k)$ を $k \leq l(k)$ で $|r_k - r_{l(k)}| > 0$ となる最小のものとする。このとき $|r_k - a_k| < |r_k - r_{l(k)}|$ となる有理数 a_k が存在することを示せ。

(3) 有理数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ.

(4) $r := [a_n]$ とおくと $r \in R$ であり $\{r_k\}$ は r に $k \to \infty$ のとき収束することを示せ。

以上で $R = X/\!\sim$ は「四則演算」と演算と相性のよい「順序」を持ち、さらに「アルキメデスの原理」と「Cauchy 列は収束する」を満たしているものであることが分かった。実はこのような集合は「連続公理」が満たされ、さらに本質的にこのような集合は唯一つであることが分かる。従って $R = \mathbb{R}$, 即ち実数全体の集合を構成出来たことになる。