担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathbb{R}^n$ の開集合と閉集合

線形空間の内積とノルム, 一般の距離空間

$\mathbb{F}$ を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする。

定義 1. V を $\mathbb{F}$ 上の線形空間とする。このとき写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ は、任意の $x, y, z \in V$ と任意の $c \in \mathbb{F}$ に対し次の 4 条件を満たすとき V 上の内積と呼ばれる。

(I1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ であり、また $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$。

(I2) $\overline{\langle y, x \rangle} = \langle x, y \rangle$ が成り立つ。但し $c \in \mathbb{F}$ に対し、$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{c} := c$、$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ のときは $\overline{c}$ は複素共役を表す。

(I3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ が成り立つ。

(I4) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$ が成り立つ。

問題 1. (Cauchy-Schwarz の不等式) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 V 上の内積とする。このとき任意の $x, y \in V$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

また等号が成立するのは x と y が一次従属のとき、かつそのときに限ることを示せ。

V 上に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が与えられているとき、

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in V$$

で定まる V 上の実数値関数 $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ は次の性質を満たす。

(N1) 任意の $x \in V$ について $\|x\| \geq 0$ であり、また $\|x\| = 0 \iff x = 0$。

(N2) 任意の $x \in V$ と $c \in \mathbb{F}$ について $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ が成り立つ。

(N3) 任意の $x, y \in V$ について $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ。

問題 2. 性質 (N1)–(N3) を確認せよ。

定義 2. $\mathbb{F}$ 上の線形空間 V の上の関数 $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ が上記の 3 つの性質 (N1)–(N3) を満たすとき、$\| \cdot \|$ を線形空間 V 上のノルムという。

$\mathbb{F}$ 上の線形空間 V にノルム $\| \cdot \|$ が与えられているとする。このとき

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V$$

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

で定まる関数 $d: V \times V \to \mathbb{R}$ は次を満たす。

(M1) $d(x,y) \geq 0$ であり、また $d(x,y) = 0 \iff x = y$。

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ 　　(三角不等式)

問題 3. 性質 (M1), (M2), (M3) を確認せよ。

定義 3. X を空でない集合とする。関数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ が上記の性質 (M1), (M2), (M3) を満たすとき、d を X 上の距離 (または距離関数) という。またこのとき (X,d) または単に X を距離空間という。

補足 1. ノルムや内積は線形空間に対して定義されている概念だが、距離 (距離関数) は任意の集合上で定義される概念であることに注意しよう。なお線形空間の上の距離でノルムから定義されていないものもある (以下の問題 4 を参照)。

問題 4. $\{0\}$ でない線形空間 V 上にノルム $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。

(1) $d(x,y) := \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ が V 上の距離となることを示せ。

(2) 前問 (1) の距離 $d(x,y)$ に対して V 上のノルム $N: V \to \mathbb{R}$ で $d(x,y) = N(x-y)$ となるものは存在しないことを示せ。

問題 5. X を空でない集合とし、関数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x = y \text{ のとき}) \end{cases}.$$

このとき d は X 上の距離関数になることを示せ。

問題 6. X を空でない集合として

$$X^{\mathbb{N}} := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in X \ (n = 1, 2, \ldots)\}$$

とおく。関数 $d: X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$d(x,y) := \begin{cases} 1/k & (x_i = y_i \ (i = 1, \ldots, k-1),\ x_k \neq y_k \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{任意の } i = 1, 2, \ldots \text{ に対して } x_i = y_i \text{ のとき}) \end{cases}.$$

但し $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表した。このとき任意の $x, y, z \in X^{\mathbb{N}}$ に対して

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

が成り立つことを示せ。また d が $X^{\mathbb{N}}$ 上の距離となることを示せ。

担当教員： 柳田 伸太郎 研究室： A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積と距離

$\mathbb{R}^n$ で実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の n 個の直積を表す。$\mathbb{R}^n$ の点は n 個の実数の組で表せる。$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と書いたら、点 $x \in \mathbb{R}^n$ の第 i 座標が $x_i \in \mathbb{R}$ で与えられているとする。

2 つの点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ の Euclid 内積 $\langle x, y \rangle$ を次で定義する。

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Euclid 内積から定義される $\mathbb{R}^n$ 上のノルムを $|x|$ と書き Euclid ノルムと呼ぶ。つまり $x \in \mathbb{R}^n$ に対して Euclid ノルム $|x|$ は次式で定義される。

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigr)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Euclid ノルムの他にも $\mathbb{R}^n$ 上のノルムが存在する。

問題 7. 以下で定義される関数 $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^n$ 上のノルムであることを示せ。

(1) A を可逆な n 次実正方行列とするとき $\|x\| := |Ax|$。

(2) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| := \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$.

(3) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

定義 4. 次で定義される関数 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid 距離という。

$$d(x, y) := |x - y| = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Bigr)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

問題 8. 上記の $\mathbb{R}^n$ の Euclid 距離 $d(x, y)$ が (定義 3 の意味の) 距離であることを示せ.

$\mathbb{R}^n$ の開集合と閉集合

$a \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対し、$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $U(a; \varepsilon)$ を次で定義する。

$$U(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

但し $d(x, y) = |x - y|$ は Euclid 距離。また空集合は任意の集合の部分集合だと約束する。

定義 5. (内点と触点、内部と閉包) A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし、また $a \in \mathbb{R}^n$ とする。

- ある $\delta > 0$ が存在して $U(a; \delta) \subset A$ となるとき、a は A の内点と呼ばれる。
- A の内点全体の集合を A^o と書き、A の内部とよぶ。
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となるとき、a は A の触点と呼ばれる。
- A の触点全体の集合を $\overline{A}$ と書き、A の閉包とよぶ。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して次を示せ。

(1) $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus A^o$.　(2) $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = (\mathbb{R}^n \setminus A)^o$.

問題 10. A と B を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。以下の命題を示せ。

(1) $(\mathbb{R}^n)^o = \mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^o = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.　(2) $A^o \subset A \subset \overline{A}$.

(3) $A \subset B$ のとき $A^o \subset B^o$, $\overline{A} \subset \overline{B}$.　(4) $(A^o)^o = A^o$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(5) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

前回、区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $\overline{I}$ という記号を導入した。これは I の閉包と一致する。このことは次の問題の主張からも従う。

問題 11. $A \subset \mathbb{R}^n$ 及び $a \in \mathbb{R}^n$ について、$a \in \overline{A}$ であるためには、$x_n \in A$ であり $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たす点列 $\{x_n\}$ が存在することが必要十分であることを示せ。

定義 6. (開集合と閉集合) A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。

- $A^o = A$ のとき A は ($\mathbb{R}^n$ の) 開集合と呼ばれる。
- $A = \overline{A}$ のとき A は ($\mathbb{R}^n$ の) 閉集合と呼ばれる。

開集合及び閉集合には様々な特徴付けがある。

問題 12. $A \subset \mathbb{R}^n$ に対する以下の命題が同値であることを示せ。

(1) A は閉集合である。

(2) $\mathbb{R}^n \setminus A$ (これを A^c と書くこともある) が開集合である。

(3) 収束する A 内の点列 $\{x_n\}$ の極限 $a \in \mathbb{R}^n$ は A の元である。

また A が開集合であることと $\mathbb{R}^n \setminus A$ が閉集合であることが同値なことを示せ。

補足 2.

(1) 問題 10 の (2) から、特に任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して A^o は開集合、$\overline{A}$ は閉集合となる。

(2) 一般の位相空間については、開集合を定義したのち閉集合を問題 12 の条件 (2) で定義するのが普通である。

(3) 定義 6 で閉集合を定める方法は、点列を扱うことが重要である距離空間の場合、特に有効である。

(4) 実際に具体的な集合が与えられていてそれが閉集合であることを示すとき、定義 6 を直接確認するのではなく、問題 12 の条件 (2) を用いると良いことも多々ある。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

開集合と閉集合の性質のうち、次の 2 つの問題で扱う性質は本質的である。

問題 13. $\mathbb{R}^n$ の開集合に関する以下の主張を示せ。

(1) $\mathbb{R}^n$ 及び $\emptyset$ は開集合である。

(2) U と V が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば $U \cap V$ も開集合である。

(3) 集合 Λ 及び各 $\lambda \in \Lambda$ に対し開集合 U_λ が与えられているとき、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ も開集合である。

問題 14. $\mathbb{R}^n$ の閉集合に関する以下の主張を示せ。

(1) $\mathbb{R}^n$ 及び $\emptyset$ は閉集合である。

(2) F と G が閉集合ならば $F \cup G$ も閉集合である。

(3) 集合 Λ 及び各 $\lambda \in \Lambda$ に対し閉集合 F_λ が与えられているとき、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ も閉集合である。

次の問題は内部と閉包の特徴付けについて扱う。

問題 15. $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して以下の主張を示せ。

(1) A^o は A に含まれる最大の開集合である。

(2) $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である。

最後に具体的に与えられた集合について、それが開集合であるか否か、あるいは閉集合であるか否か判定してみよう。

問題 16. 以下の集合 A は指定された X の開集合か、閉集合か、あるいはそのどちらでもないか、理由とともに答えよ。

(1) A は $\mathbb{R}^n$ の有限個の点からなる集合, $X := \mathbb{R}^n$.

(2) $A := [a, \infty) \subset \mathbb{R}$, $X := \mathbb{R}$.

(3) $A := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1\}$, $X := \mathbb{R}^2$.

(4) $U_k := U(0; 1/k) \subset \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ としたとき $A := \bigcap_{k=1}^\infty U_k$, $X := \mathbb{R}^n$.

(5) $F_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1/k \le |x| \le 1\}$ としたとき $A := \bigcup_{k=1}^\infty F_k$, $X = \mathbb{R}^n$.

(6) 連続関数 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ について $A := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1]\}$, $X = \mathbb{R}^2$.

(7) $A := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \le 1\} \cup \{(0, 0)\}$, $X = \mathbb{R}^2$.

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

その他の問題

問題 17. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の境界 ∂A とは

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$$

で定義される $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。以下の問いに答えよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合の場合 $\partial A = \overline{A} \setminus A$ が成り立つことを示せ。

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合の場合 $\partial A = A \setminus A^o$ が成り立つことを示せ。

(3) $\partial A \neq \overline{A} \setminus A$ かつ $\partial A \neq A \setminus A^o$ となる部分集合 A の例を挙げよ。

問題 18. (X, d) を距離空間とする。($\mathbb{R}^n$ の場合と同様にして) $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し $U(a; \varepsilon) := \{x \in X\,;\, d(x, a) < \varepsilon\}$ と定め、これを用いて定義 5、6(の $\mathbb{R}^n$ を X と書き換えて) で開集合や閉集合などを定義する。

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ と $a \in X$ に対して $U(a; \varepsilon)$ が開集合であることを示せ。

(2) 距離関数 d が問題 6 の性質、つまり

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}, \qquad x, y, z \in X \tag{$\heartsuit$}$$

を満たすと仮定する (式 ($\heartsuit$) を満たす距離を非 Archimedes 的距離という)。このとき任意の $\varepsilon > 0$ と $a \in X$ に対して $U(a; \varepsilon)$ が閉集合であることを示せ。

問題 19. V を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ 上の線形空間とし、V 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ からノルム $\|\cdot\|$ が定まっているとする。このとき任意の $x, y \in V$ に対して次の等式が成立することをを示せ。

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

この式は「中線定理」と呼ばれているが、この言葉の幾何学的な意味を説明せよ。

問題 20. 上記の中線定理を用いて、以下の線形空間 V 上のノルム $\|\cdot\|$ が内積から定まっているものかどうか判定せよ。また (3), (4) については $\|\cdot\|$ がノルムであることも示せ。

(1) $V := \mathbb{R}^n$, $\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

(2) $V := \mathbb{R}^n$, $\|x\| := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

(3) $V := C([0,1])_{\mathbb{R}}$, $\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $f \in C([0,1])_{\mathbb{R}}$. ただし $C([0,1])_{\mathbb{R}}$ は閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を表す。

(4) $V := C([0,1])_{\mathbb{R}}$, $\|f\| := \left(\int_0^1 (f(x))^2\, dx\right)^{1/2}$.