2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　01 月 30 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

6 有理的共形場理論

6.4 モジュラーテンソル圏と Verlinde 公式

定義. (1) rigid なブレイド圏 $\mathcal{C}$ について、函手的同型 $\psi_V : V^{**} \xrightarrow{\sim} V$ を次のような同型の合成で定義する。

$$V^{**} \xrightarrow{i_V \otimes \mathrm{id}_{V^{**}}} V \otimes V^* \otimes V^{**} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{V^* V^{**}}} V \otimes V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes e_V} V.$$

(2) リボン圏について、函手的同型 $\theta_V : V \xrightarrow{\sim} V$ を $\theta_V := \psi_V \circ \delta_V$ で定義する。

定義. $\mathcal{C}$ を半単純リボン圏とする。各 $i \in I$ に対し $\theta_{V_i} := \theta_i \, \mathrm{id}_{V_i}$ で $\theta_i \in K^\times$ を定める。

補題 6.4.1. $\theta_0 = 1$ 及び $\theta_{i^*} = \theta_i$ が成立する。

定義. $\mathcal{C}$ を半単純リボン圏とする。
(1) $\mathcal{C}$ の対象 V とその自己準同型 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ に対し、f の**トレース** $\mathrm{tr}(f) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \simeq K$ を次で定義する。

$$1 \xrightarrow{i_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_V} V \otimes V^* \xrightarrow{\delta_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e_{V^*}} 1.$$

(2) $i, j \in I$ に対し $\widetilde{s}_{i,j} \in K$ を $\widetilde{s}_{i,j} := \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \, \mathrm{tr}(\theta_{V_i^* \otimes V_j})$ で定義する。
(3) $i \in I$ に対し $d_i \in K$ を $d_i := \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{V_i})$ で定義する。これを V_i の**量子次元** (quantum dimension) と呼ぶ。

補題 6.4.2. (1) 量子次元 d_i は以下の性質を満たす。

$$d_0 = 1, \quad d_{i^*} = d_i, \quad d_i d_j = \textstyle\sum_{k \in I} N_{i,j}^k d_k.$$

(2) フュージョン係数 $N_{i,j}^k$ を用いると以下が成立する。.

$$\widetilde{s}_{i,j} = \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \textstyle\sum_{k \in I} N_{i^*,j}^k \theta_k d_k, \quad \widetilde{s}_{i,j} = \widetilde{s}_{j,i} = \widetilde{s}_{i^*,j^*}, \quad \widetilde{s}_{i,0} = d_i.$$

命題 6.4.3. $\mathcal{C}$ を半単純リボン圏とする。行列 $t = (t_{i,j})_{i,j \in I}$ と $c = (c_{i,j})_{i,j \in I}$ を次のように定義する。

$$t_{i,j} := \delta_{i,j} \theta_i, \quad c_{i,j} := \delta_{i,j^*}$$

(1) $\widetilde{s} = (\widetilde{s}_{i,j})_{i,j \in I}$ と t 及び c は以下を満たす。

$$(\widetilde{s} t)^3 = p^+ (\widetilde{s})^2, \quad (\widetilde{s} t^{-1})^3 = p^- (\widetilde{s})^2 c, \quad ct = tc, \quad c\widetilde{s} = \widetilde{s} c, \quad c^2 = 1.$$

但し

$$p^\pm := \textstyle\sum_{i \in I} \theta_i^{\pm 1} d_i^2.$$

(2) 更にもし $\widetilde{s}$ が可逆なら $\widetilde{s}^2 = p^+ p^- c$ となる。

定義. モジュラーテンソル圏とは半単純リボン圏であって $|I| < \infty$ かつ行列 $\widetilde{s} = (\widetilde{s}_{i,j})_{i,j \in I}$ が可逆なものを言う。

定義. $\overline{K}$ を K の代数閉体とする。モジュラーテンソル圏に対し $D \in \overline{K}$ と行列 s を以下のように定める。

$$D := \sqrt{p^+ p^-}, \quad s := \widetilde{s}/D.$$

[*1] 2017/01/30 版, ver. 1.0.

注意. 命題 6.4.3 から行列 s は次の式を満たす。

$$(st)^3 = \sqrt{p^+/p^-}s^2, \quad s^2 = c.$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元の関係式

$$(ST)^3 = S^2, \quad S^4 = 1, \quad S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

からモジュラーテンソル圏には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が射影的に作用することが分かる。これが「モジュラー」の由来である。

定理 6.4.4 (Verlinde 公式 (Bakalov-Kirillov の Theorem 3.1.13))**.** モジュラーテンソル圏について次の式が成立する。

$$N_{i,j}^k = \sum_{r \in I} \frac{s_{i,r}s_{j,r}s_{k^*,r}}{s_{0,r}}.$$

6.5　モジュラー函手とモジュラーテンソル圏

定理 6.5.1 (Bakalov-Kirillov, Theorem 6.7.12)**.** $\mathbb{C}$ 上のモジュラーテンソル圏 $\mathcal{C}$ から中心電荷 c が $\exp(\pi i c) = p^+/p^-$ で与えられる $\mathcal{C}$ 上のモジュラー函手が以下のように構成できる。

- $\mathbb{P}^1_n$ を $\mathbb{P}^1$ 上に marked point $x_1, \dots, x_n$ ($x_i \in \mathbb{R}$, $x_1 < \cdots < x_n$) があるものとして
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, M_1 \otimes_{\mathcal{C}} \cdots \otimes_{\mathcal{C}} M_n) = \langle M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_n \rangle_{\mathbb{P}^1_n}. \tag{6.5.1}$$
- $\mathcal{C}$ の同型 θ_{M_i} はループ $x_i \mapsto e^{i\phi}x_i$ ($0 \le \phi \le 2\pi$) に関する共形ブロックのモノドロミーに対応する。
- $\sigma_{M_i,M_{i+1}}$ は x_i と x_{i+1} の置換に関するモノドロミーに対応する。.

モジュラーテンソル圏を少し拡張すると、この定理の逆の主張が成立する。

定義. (1) モノイダル圏 $\mathcal{C}$ の対象 V の**弱双対** (weak dual) V^* とは函手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, V \otimes -)$ を表現する対象のこと。
(2) モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が **weakly rigid** であるとは全ての対象が弱双対を持ち、更に函手 $* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $V \mapsto V^*$ が圏同値を与えるもののことである。
(3) **弱リボン圏**とは weakly rigid なブレイド圏に函手的同型 $\theta : V \xrightarrow{\sim} V$ があって rigid ブレイド圏と同様の整合性を満たすもののことである。

定理. もし $\mathbb{C}$ 上の半単純アーベル圏 $\mathcal{C}$ 上に中心電荷 c のモジュラー函手があるなら $\mathcal{C}$ は弱リボン圏の構造を持つ。もしこの弱リボン圏が更に rigid なら、$\mathcal{C}$ はモジュラーテンソル圏であって $\exp(\pi i c) = p^+/p^-$ となる。

6.6　WZW 模型のフュージョン代数

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純 Lie 代数とする。$\{J^a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし、$J^a_n := J^a \otimes t^n \in \widehat{\mathfrak{g}}$ と書く。また $\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Lie 代数とし、$\mathcal{O}^{\mathrm{int}}_k(\widehat{\mathfrak{g}})$ でレベル $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ の可積分 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現のなす圏を表す。$\mathcal{O}^{\mathrm{int}}_k(\widehat{\mathfrak{g}})$ の単純対象は $\widehat{L}^k_\lambda$ ($\lambda \in P_{+,k}$) で与えられる。これらは有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 表現 L_λ の誘導表現から得られる。

また、$V_k(\mathfrak{g})$ でレベル k のアフィン頂点代数を表すと、$\widehat{L}^k_\lambda$ は $V_k(\mathfrak{g})$ 加群と思えるのだった。

定理 6.5.1 を $\mathcal{C} = \mathcal{O}^{\mathrm{int}}_k(\widehat{\mathfrak{g}})$ に適用する。フュージョン係数は (6.5.1) から次のように書ける。

$$N^\nu_{\lambda,\mu} = \dim \mathrm{Hom}_{U_Z(V)}(\widehat{L}^k_\nu, \widehat{L}^k_\lambda \otimes \widehat{L}^k_\mu).$$

但し $\lambda, \mu, \nu \in P_{+,k}$, $V = V_k(\mathfrak{g})$ 及び $Z := \mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$. 共形ブロックの空間は $\mathfrak{M}$ 上の平坦ベクトル束なので $(x_1, x_2, x_3) = (0, x, \infty)$ と仮定して良い。

以下 v^k_λ で $\widehat{L}^k_\lambda$ の最高ウェイト元を表す。

補題. $M = \widehat{L}^k_\lambda$ を $V = V_k(\mathfrak{g})$ 加群とみなし $Y_M(-,z) : V \to \mathrm{End}(M)[[z]]$ を構造射とする。
(1) $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(L_\lambda)$ を L_λ の表現の構造射とすると、v^k_λ は次を満たす。

$$(J^a_n)^M v^k_\lambda = 0 \ (n > 0), \quad (J^a_0)^M v^k_\lambda = \rho_\lambda(J^a).$$

但し $(J^a_n)^M$ は展開 $Y_M(J^a_{-1}v_k, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (J^a_n)^M z^{-n-1} \in \mathrm{End}(M)[[z^{\pm 1}]]$ の係数。
(2) 同様に

$$L^M_n v^k_\lambda = 0 \ (n > 0), \quad L^M_0 v^k_\lambda = \Delta_\lambda v^k_\lambda, \ \Delta_\lambda := \frac{(\lambda, \lambda+\rho)}{2(k+h^\vee)}. \tag{6.6.1}$$

ここで L^M_n は菅原作用素の展開 $Y_M(\omega_{\mathfrak{g},k}, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^M_n z^{-n-2} \in \mathrm{End}(M)[[z^{\pm 1}]]$ に現れる係数である。

注意. (6.6.1) は v^k_λ がプライマリー場の類似物であることを意味する。

$N^\nu_{\lambda,\mu}$ を計算するには最高ウェイト元 v^k_λ 達の間の写像を考えれば十分である。そこで $Y_{\widehat{L}^k_\lambda}(J^a_{-1}v_k, z)$ の具体的な表示があれば便利そうである。そのような表示として**脇本実現**と呼ばれる $\widehat{\mathfrak{g}}$(ないし $V_k(\mathfrak{g})$) の自由場表示が知られている。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合の脇本実現は 12/26 のレポート問題 6 を参照のこと。またこの場合の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現は $P_{+,k} = \{0, 1, \ldots, k\}$ でラベルされる。脇本実現と遮蔽作用素を用いると共形ブロックの積分表示が得られる。そして非自明な $\widehat{L}^k_n \to \widehat{L}^k_l \otimes \widehat{L}^k_m$ が存在するための条件を求めることができる。結果だけ書くと

定理 6.6.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合は

$$N^n_{l,m} = \begin{cases} 1 & |l-m| \le n \le \min(l+m, k-l-m) \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

注意. (1) この公式は

D. Gepner, E. Witten, *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. **B278** (1986), 493–549

で発見された。証明は例えば

山田泰彦, 共形場理論入門, 数理物理シリーズ **1**, 培風館 (2006)

の §5.11 を参照。
(2) 一般の $\mathfrak{g}$ に対する脇本表現は複雑でフュージョン係数の計算も難しい。しかし指標のモジュラー性を用いるとフュージョン係数が決定できる。これに関しては

脇本実, 無限次元リー環, 岩波書店 (2008)

の第 5 章を参照せよ。

参考書

B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, AMS (2001) の第 3,7 章.

この講義は以上でおしまいです。