2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　1 月 23 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。期限は**次回 1 月 30 日 (月) の講義まで**です。

通常問題

半単純リボン圏について、講義と同様、以下の記号を用いる。
(記号) 零対象ではない単純対象の同型類の集合を I で表し、$\{V_i\}_{i\in I}$ をその代表元とする。また $V_0 = 1$ と約束する。

レポート問題 1 ($\star\star$ 半単純リボン圏)**.** 講義で証明を省略した補題 6.3.3 及び 6.3.4 を証明せよ。以下にその主張を述べる。
(補題 6.3.3) 各 i について $(V_i)^*$ は単純対象。
(補題 6.3.4) フュージョン係数 $N_{i,j}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次の式で定める。

$$V_i \otimes V_j \simeq \textstyle\bigoplus_{k\in I} V_k^{\oplus N_{i,j}^k}.$$

すると以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned} &N_{i,j}^k = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_k, V_i \otimes V_j) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, V_i \otimes V_j \otimes V_k^*), \\ &N_{i,j}^k = N_{j,i}^k = N_{i,k^*}^{j^*} = N_{i^*,j}^{k^*}, \quad N_{i,j}^0 = \delta_{i,j^*}. \end{aligned}$$

レポート問題 2 ($\star\star\star$ 量子次元)**.** 体 K 上の半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ に関する補題 6.4.1 及び 6.4.2 を証明せよ。主張は以下の通り。
(補題 6.4.1) 各 $i \in I$ に対し $\theta_i \in K^\times$ を $\theta_{V_i} = \theta_i \,\mathrm{id}_{V_i}$ で定義する。この時 $\theta_0 = 1$ かつ $\theta_{i^*} = \theta_i$.
(補題 6.4.2)　対象 V とその自己準同型 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ に対し、$\mathrm{tr}(f) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \simeq k$ を次で定義する。

$$1 \xrightarrow{i_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_V} V \otimes V^* \xrightarrow{\delta_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e_{V^*}} 1.$$

また $i,j \in I$ に対し $\widetilde{s}_{i,j} := \theta_i^{-1}\theta_j^{-1}\,\mathrm{tr}(\theta_{V_i^* \otimes V_j}) \in K^\times$ とし、$i \in I$ に対し $d_i := \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{V_i}) \in K^\times$ とする。この時
(1) $d_0 = 1$,$d_{i^*} = d_i$, $d_i d_j = \sum_{k\in I} N_{i,j}^k d_k$.
(2) フュージョン係数 $N_{i,j}^k$ を用いると以下が成立する。

$$\widetilde{s}_{i,j} = \theta_i^{-1}\theta_j^{-1} \textstyle\sum_{k\in I} N_{i^*,j}^k \theta_k d_k, \quad \widetilde{s}_{i,j} = \widetilde{s}_{j,i} = \widetilde{s}_{i^*,j^*}, \quad \widetilde{s}_{i,0} = d_i.$$

以上です。

[*1] 2017/01/22 版, ver. 1.0