2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　01 月 23 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

6　有理的共形場理論

6.3　リボン圏とフュージョン代数

定義 6.3.1. **モノイダル圏**とは圏 $\mathcal{C}$ と

- 双函手 (bifunctor) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,
- 函手的同型 (functorial isomorphism) $\alpha_{UVW} : (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$,
- 対象 1 (単位対象と呼ばれる) と函手的同型 $\lambda_V : 1 \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ and $\rho_V : V \otimes 1 \xrightarrow{\sim} V$

で次の結合律を満たすもののこと:

- $V_1, \ldots, V_n$ を $\mathcal{C}$ の対象とする。X_1, X_2 は $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ に 1 及び () を挿入して表せる $\mathcal{C}$ の対象だとする。例えば $X_1 = (V_1 \otimes 1) \otimes (V_2 \otimes V_3)$, $X_2 = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. この時 α, λ, ρ 達及びそれらの逆函手を合成して得られる同型 $X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ は全て等しい。

事実 (MacLane[*2]). $(C, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ をモノイダル圏の定義 6.3.1 と同様のデータとする。これらに関する結合律は五角形公理 (pentagon axiom) 及び三角形公理 (triangle axiom) と同値である。

定義. **ブレイド圏** (braided tensor category) とはモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, 1, \lambda, \rho)$ と函手的同型

$$\sigma_{VW} : V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$$

であって、$\alpha, \lambda, \rho, \sigma$ とそれらの逆函手の合成が対応するブレイド群[*3]の元にのみ依存するもののこと。但し函手

$$\sigma_i : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}} V_1 \otimes \cdots \otimes V_{i-1} \otimes V_{i+1} \otimes V_i \otimes V_{i+2} \otimes \cdots \otimes V_n$$

をブレイド群 B_n の生成元 b_i に対応させ、また α, λ, ρ を 1 に対応させている。

定義. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする。
(1) $\mathcal{C}$ の対象 V の**右双対**とは対象 V^* と射

$$e_V : V^* \otimes V \to 1, \quad i_V : 1 \to V \otimes V^*$$

であって $(\mathrm{id}_V \otimes e_V) \circ (i_V \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$ 及び $(e_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ (\mathrm{id}_{V^*} \otimes i_V) = \mathrm{id}_{V^*}$ となるもののこと。
(2) $\mathcal{C}$ の対象 V の**左双対**とは対象 ${}^*V$ と射 $e'_V : V \otimes {}^*V \to 1$, $i'_V : 1 \to {}^*V \otimes V$ であって (1) と同様の性質を満たすもののこと。
(3) $\mathcal{C}$ は全ての対象に右双対と左双対がある時 **rigid** と呼ばれる。

定義. **リボン圏**とは rigid なブレイド圏と函手的同型

$$\delta_V : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$$

であって $\delta_{V \otimes W} = \delta_V \otimes \delta_W$, $\delta_1 = \mathrm{id}_1$, $\delta_{V^*} = (\delta_V^*)^{-1}$ を満たすもののことである。但し δ_V^* は e_V や i_W から定まる同型 $\mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1, W \otimes V^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ で $\delta_V \in \mathrm{Hom}(V, V^{**})$ を $\mathrm{Hom}(V^{**}, V)$ に写したものである。

[*1] 2017/01/23 版, ver. 1.0
[*2] 詳しくは Bakarov-Kirillov の Theorem 1.1.9 を参照。証明は次の教科書の §VII.2 にある。
MacLane, S., *Categories for the working mathematician*, 2nd. ed., Graduate Texts in Mathematics, **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
[*3] $B_n = \langle b_1, \ldots, b_{n-1} \mid b_i b_j = b_j b_i \ (|i-j| > 1),\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \rangle$.

定義. 半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ とはリボン圏であってかつ (ある体上で) 線形な半単純アーベル圏であり以下を満たすもののことである。

- モノイダル構造に現れる双函手 $\otimes$ は線形構造に関して双線形。
- $\mathbf{1}$ は単純対象。

記号 6.3.2. 半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ について、零対象ではない単純対象の同型類の集合を I で表し、$\{V_i\}_{i\in I}$ をその代表元とする。また $V_0 = \mathbf{1}$ と約束する。

補題 6.3.3. 半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ に関して、各 i について $(V_i)^*$ は単純対象。

定義. $i \in I$ に対し $i^* \in I$ を $V_{i^*} = (V_i)^*$ で定める。特に $0^* = 0$ である。

定義. 半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ に対し**フュージョン係数** $N_{i,j}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次の式で定める。

$$V_i \otimes V_j \simeq \bigoplus_{k\in I} V_k^{\oplus N_{i,j}^k}.$$

補題 6.3.4. 以下の等式が成立する。

$$N_{i,j}^k = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_k, V_i \otimes V_j) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, V_i \otimes V_j \otimes V_k^*),$$
$$N_{i,j}^k = N_{j,i}^k = N_{i,k^*}^{j^*} = N_{i^*,j}^{k^*}, \quad N_{i,j}^0 = \delta_{i,j^*}.$$

定義. 半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ の**フュージョン代数** (または **Verlinde 代数**) とは生成元 x_i $(i \in I)$ と関係式

$$x_i x_j = \sum_{k\in I} N_{i,j}^k x_k.$$

で定まる代数のことである。

6.4 モジュラーテンソル圏と Verlinde 公式

定義. (1) rigid なブレイド圏 $\mathcal{C}$ について、函手的同型

$$\psi_V : V^{**} \xrightarrow{\sim} V$$

を次のような同型の合成で定義する。

$$V^{**} \xrightarrow{i_V \otimes \mathrm{id}_{V^{**}}} V \otimes V^* \otimes V^{**} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{V^*V^{**}}} V \otimes V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes e_V} V.$$

(2) リボン圏について、函手的同型 $\theta_V : V \xrightarrow{\sim} V$ を次で定義する。

$$\theta_V := \psi_V \circ \delta_V.$$

注意. θ_V は balancing isomorphism と呼ばれ、次の性質を満たす。

$$\theta_{V\otimes W} = \sigma_{VW}\sigma_{WV}(\theta_V \otimes \theta_W), \quad \theta_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}, \quad \theta_{V^*} = (\theta_V)^*.$$

以下体 K を固定し、半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ と言ったら K 上のものとする。またそのような $\mathcal{C}$ について記号 6.3.2 を用いる。特に各 $i \in I$ について $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_i) = K$ となることに注意する。

定義. $\mathcal{C}$ を半単純リボン圏とする。各 $i \in I$ に対し $\theta_i \in K^\times$ を次で定義する。

$$\theta_{V_i} = \theta_i \,\mathrm{id}_{V_i}.$$

補題 6.4.1. $\theta_0 = 1$ 及び $\theta_{i^*} = \theta_i$ が成立する。

定義. $\mathcal{C}$ を半単純リボン圏とする。
(1) $\mathcal{C}$ の対象 V とその自己準同型 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ に対し、f の**トレース** $\mathrm{tr}(f) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \simeq K$ を次で定義する。

$$1 \xrightarrow{i_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_V} V \otimes V^* \xrightarrow{\delta_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e_{V^*}} 1.$$

(2) $i, j \in I$ に対し $\widetilde{s}_{i,j} \in K$ を次で定義する。

$$\widetilde{s}_{i,j} := \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \, \mathrm{tr}(\theta_{V_i^* \otimes V_j}).$$

(3) $i \in I$ に対し $d_i \in K$ を次で定義する。これを V_i の**量子次元** (quantum dimension) と呼ぶ。

$$d_i := \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{V_i}).$$

定義. モジュラーテンソル圏とは半単純リボン圏 $\mathcal{C}$ であって $|I| < \infty$ かつ行列 $\widetilde{s} = (\widetilde{s}_{i,j})_{i,j \in I}$ が可逆なものを言う。

参考書

B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, AMS (2001) の第 1,2,3 章.

以上です。