2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　1 月 16 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。期限は**次回 1 月 23 日 (月) の講義まで**です。

通常問題

レポート問題 1 ($\star\star$ 超幾何微分方程式). 次式で定義される級数を (Gauss の) 超幾何級数といった。

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} z^n = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}z^2 + \cdots.$$

但し $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$. 特に $(1)_n = n!$ である。
(1) $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ の時、$F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ の (z に関する) 収束半径は 1 であることを示せ。
(2) $y(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は次の微分方程式 (1.1) の解であることを示せ。(1.1) は超幾何微分方程式と呼ばれる。

$$z(1-z)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + \bigl(\gamma - (1+\alpha+\beta)z\bigr)\frac{dy(z)}{dz} - \alpha\beta y(z) = 0 \tag{1.1}$$

(3) 方程式 (1.1) は 2 階の線形微分方程式なので、$z=0$ の近傍での解空間は 2 次元である。$\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ の時、解空間の基底として $y_{0,1}(z) := F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ と次の $y_{0,2}(z)$ が取れることを示せ。

$$y_{0,2}(z) := z^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; z).$$

(4) 超幾何微分方程式 (1.1) を $w = 1-z$ と変数変換すると次の微分方程式が得られることを確認せよ。

$$w(1-w)\frac{d^2y(w)}{dw^2} + \bigl(\alpha+\beta-\gamma+1-(1+\alpha+\beta)w\bigr)\frac{dy(w)}{dw} - \alpha\beta y(w) = 0. \tag{1.2}$$

レポート問題 2 ($\star\star\star$ 超幾何関数の接続係数). 問題 1 の記号や結果を用いることにする。微分方程式 (1.2) は元の超幾何微分方程式 (1.1) で $(\alpha,\beta,\gamma) \longmapsto (\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1)$ としたものなので、設問 (3) の結果より $w=0$ での解の基底、即ち $z=1$ での解の基底として

$$y_{1.1}(z) := F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z), \quad y_{1.2}(z) := (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)$$

が取れる。従って、やはり超幾何微分方程式の解である $y_{0,1}(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $z=1$ の近傍で

$$y_{0,1}(z) = M^{(0,1)}_{1,1}y_{1,1}(z) + M^{(0,1)}_{1,2}y_{1,2}(z), \quad M^{(0,1)}_{1,1}, M^{(0,1)}_{1,1} \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

と線形結合で書けるはずである。実は $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,,\ldots\}$ かつ $\alpha+\beta<\gamma$ の時この係数は

$$M^{(0,1)}_{1,1} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad M^{(0,1)}_{1,2} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \tag{2.2}$$

となる。但し $y_{1,2}(z)$ に現れる $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ は $0 \le z \le 1$ で実数となる分岐を取っている。係数 $M^{(0,1)}_{1,1}, M^{(0,1)}_{1,2}$ を超幾何微分方程式の $z=0$ から $z=1$ への接続係数と呼ぶ。以下ではこの接続係数を導出する。
(1) 超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は次の積分表示を持つことを示せ。

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}\,dt.$$

[*1] 2017/01/15 版, ver. 1.0

(2) 積分表示から次の等式を導け。

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

(3) 等式 (2.1) で $z=0,1$ として $M^{(0,1)}_{1,1},M^{(0,1)}_{1,2}$ に関する連立方程式を求め、それを解くことで (2.2) を導け。

(4) 同様に $y_{0,2}(z):=z^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta,2-\gamma;z)$ を

$$y_{0,2}(z)=M^{(0,1)}_{2,1}y_{1,1}(z)+M^{(0,1)}_{2,2}y_{1,2}(z),$$

と線形結合で表した時の係数は以下で与えられることを確認せよ。

$$M^{(0,1)}_{2,1}=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)},\quad M^{(0,1)}_{2,2}=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}.$$

以上をまとめて次のように書く。行列 $M^{(0,1)}$ を超幾何微分方程式の $z=0$ から $z=1$ への接続行列と呼ぶ。

$$Y_0=M^{(0,1)}Y_1,\quad Y_i:=\begin{pmatrix}y_{i,1}(z)\\y_{i,2}(z)\end{pmatrix},\quad M^{(0,1)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, & \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\\ \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}, & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}\end{pmatrix}.$$

レポート問題 3 ($\star\star\star$ 超幾何関数の接続係数その 2)**.** 今までは超幾何微分方程式 (1.1) の $z=0$ および $z=1$ での解を考えたが、これらは (1.1) の特異点と呼ばれる点になっている。実は $z=\infty$ も (1.1) の特異点である。

(1) $w=1/z$ として (1.1) を書き換えることで、$z=\infty$ の近傍での解空間の基底として次が取れることを示せ。

$$y_{\infty,1}(z):=(-z)^{-\alpha}F(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta,1/z),\quad y_{\infty,2}(z):=(-z)^{-\beta}F(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\beta,1/z).$$

(2) 問題 2 と同様の議論で、超幾何微分方程式の $z=0$ から $z=\infty$ への接続行列が次で与えられることを示せ。

$$Y_0=M^{(0,\infty)}Y_\infty,\quad Y_\infty:=\begin{pmatrix}y_{\infty,1}(z)\\y_{\infty,2}(z)\end{pmatrix},$$

$$M^{(0,\infty)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}, & \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},\\ (-1)^{1-\gamma}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}, & (-1)^{1-\gamma}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\end{pmatrix}.$$

レポート問題 4 ($\star$ 頂点代数の公理)**.** $(V,|0\rangle,T,Y)$ を頂点代数とする。$n\in\mathbb{Z}$ に対し V 上の双線形型式 $_{(n)}$ を

$$_{(n)}:V\times V\longrightarrow V,\quad (a,b)\longmapsto a_{(n)}b:=(Y(a,z)b\text{ の }z^{-n-1}\text{ の係数})$$

で定義する。この時次の等式が任意の $a,b\in V$ に対し成立することを示せ。

$$T(a_{(n)}b)=(Ta)_{(n)}b+a_{(n)}(Tb).$$

レポート問題 5 ($\star\star$ chiral differential operators)**.** $A:=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ を N 変数多項式環とする。更に無限個の文字 $x_i^{(n)},\partial_i^{(n)}$ $(i=1,\dots,N,\ n\in\mathbb{Z}_{\ge0})$ を用意し、可換代数 $\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_N:=A[x_i^{(n)},\partial_i^{(n)}]$ を考える。これは $\mathbb{C}$ 上の線形空間である。$\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_N$ 上の導分 (derivation)T を $T(a^{(n)}):=a^{(n+1)}$ (但し $a=x_i$ または ∂_j) で定めることができる。

(1) この時以下の条件を満たすように双線形型式 $_{(n)}$ が定義できることを確認せよ。

$$(\partial_j^{(0)})_{(n)}f=\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_j} & (n=0)\\ 0 & (n>0)\end{cases},\quad (f\in A),$$

$$(x_i^{(0)})_{(-n-1)}P=x_i^{(n)}\cdot P\quad (n\ge0,\ P\in\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_N),$$

$$(\partial_j^{(0)})_{(-n-1)}P=\partial_j^{(n)}\cdot P\quad (n\ge0,\ P\in\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_N).$$

(2) 更に $\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_N$ 上に頂点代数の構造が定まることを確認せよ。講義で扱った頂点代数の定義 (特に Y) と $_{(n)}$ との関係は問題 4 を参照すること。

以上です。