

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

## 6 有理的共形場理論

### 6.1 モジュラー関手 ( 続き )

記号.  $\mathfrak{M}_{g,n}$ :  $n$  点付き種数  $g$  の安定曲線のモジュライ空間。

$\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ : 半安定曲線を付け加えることによる  $\mathfrak{M}_{g,n}$  のコンパクト化。

$D := \overline{\mathfrak{M}}_{g,n} \setminus \mathfrak{M}_{g,n} \supset D^k := \{k+1 \text{ 個の } 2 \text{ 重点を持つ点付き曲線}\}$ .

定義.  $n$  次元複素多様体  $M$  の正規交差因子 (normal crossing divisor)  $D$  とは、余次元 1 の部分多様体  $D_i$  達の合併  $D = \cup_i D_i$  であって、 $k$  個の交差がおきる点  $p \in M$  では局所座標  $z_1, \dots, z_n$  があって  $D$  が  $z_1 \cdots z_k = 0$  とかけるものこと。

事実 (Deligne-Mumford\*2).  $D$  は (Deligne-Mumford スタックの意味で)  $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$  の正規交差因子. また  $D = \sqcup_{k \geq 0} D^k$  であり  $D^k$  は  $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$  において余次元  $k$ .

以下、前回導入した  $\mathfrak{M}_{*,A}, \overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  を用いる。  $D, D^k$  も同様に定義する。

事実. \*3 有限集合  $A$  と  $\alpha, \beta \in A$  に対し、clutching map と呼ばれるスタックの射が次で定まる。

$$S_{\alpha,\beta} : \mathfrak{M}_{*,A} \longrightarrow N(D^0), \quad X^\vee \longmapsto (X, v).$$

ここで  $N(D^0)$  は  $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  における  $D^0 \subset \overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  の (スタックの意味での) 法束 (normal bundle) であり、また  $X \in D^0$  は滑らかな曲線  $X^\vee \in \mathfrak{M}_{*,A}$  の marked point  $\alpha, \beta$  を潰して出来る特異曲線。そして

$$v := v_\alpha \otimes v_\beta \in T_\alpha X^\vee \otimes T_\beta X^\vee \simeq N_X(D^0).$$

ここで  $v_\alpha, v_\beta$  は  $X^\vee \in \mathfrak{M}_{*,A}$  の  $\alpha, \beta$  における接ベクトルである。

定義.  $\nabla$  を複素多様体  $M$  上のベクトル束  $E$  の接続とする。

(1)  $\nabla$  は各点  $p \in D$  で以下の条件を満たすとき  $D$  において対数的特異点を持つという。  $p \in D$  において局所座標  $(z_1, \dots, z_n)$  があって  $D$  が  $z_1 \cdots z_k = 0$  と書けるとする。すると  $E$  を適当に自明化して、 $\nabla$  が

$$\nabla_{\partial/\partial z_i} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{A_i(z)}{z_i} & (1 \leq i \leq k) \\ \frac{\partial}{\partial z_i} + A_i(z) & (k+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

で与えられる。但し  $A_i(z)$  は正則行列に値をとる  $z$  の函数。

(2)  $\nabla$  が  $D$  において正則特異点 (regular singularity) を持つとは、対数的特異点を持つ接続と有理型的に同値であることを言う。

記号. 複素多様体  $M$  と正規交差因子  $D \subset M$  に対し、 $\text{RS}(M, M \setminus D)$  で  $M$  上のベクトル束  $E$  とその上の接続  $\nabla$  であって  $D$  で正則特異点を持つものの組  $(E, \nabla)$  のなす圏を表す。

定義.  $L$  を複素多様体  $M$  上の直線束とする。  $L$  上のモノドロミー的接続とは、 $L \setminus \{\text{零切断}\}$  上の  $\mathbb{C}^\times$  同変ベクトル束  $E$  と  $E$  上の接続  $\nabla$  であって  $\mathbb{C}^\times$  作用と可換なもの組  $(E, \nabla)$  のことである。

\*1 2017/01/16 版, ver. 1.0.

\*2 Deligne, P., Mumford, D., *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 75–100.

\*3 Bakalov-Kirillov の §6.2.

補題. \*4  $M$  を複素多様体、 $D \subset M$  を滑らかな因子とする。この時関手

$$\mathrm{Sp}_D : \mathrm{RS}(M, M \setminus D) \longrightarrow \mathrm{RS}(N(D), N^\times(D))$$

であって、 $\mathrm{Sp}_D(E, \nabla)$  は法束  $N(D) \rightarrow D$  上のモノドロミー的接続であって  $\nabla$  と同じ  $D$  周りのモノドロミーを持つものが存在する。但し  $N^\times(D) := N(D) \setminus \{\text{零切断}\}$ 。

証明.  $(E, \nabla) \in \mathrm{RS}(M, M \setminus D)$  は局所的には  $\nabla_1 = \partial/\partial z_1 + A_1(z)/z_1$ ,  $\nabla_i = \partial/\partial z_i + A_i(z)$  ( $2 \leq i \leq n$ ) と書ける。ここで  $(z_1, \dots, z_n)$  達は  $M$  の局所座標であり  $z_1$  が  $D$  の定義方程式だとする。また  $\nabla_i := \nabla_{\partial/\partial z_i}$  とした。 $N(D)$  の局所座標として  $(t, z_2, \dots, z_n)$  が取れる。 $\mathrm{Sp}_D(E, \nabla) = (E, \bar{\nabla})$  を次で定めれば良い。

$$\bar{\nabla}_{\partial/\partial t} := \partial/\partial t + A_1(0, z_2, \dots, z_n)/t, \quad \bar{\nabla}_{\partial/\partial z_i} := \partial/\partial z_i + A_i(0, z_2, \dots, z_n) \quad (i = 2, \dots, n).$$

□

系.  $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  とその因子  $D^0$  に対し特殊化関手と呼ばれる関手

$$\mathrm{Sp} : \mathrm{RS}(\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}, \mathfrak{M}_{*,A}) \longrightarrow \mathrm{RS}(N(D^0), N^\times(D^0))$$

が存在する。ここで  $\mathrm{Sp}(E, \nabla)$  は  $N(D^0)$  上のモノドロミー的接続であり、 $\nabla$  と同じ  $D$  周りのモノドロミーを持つ。

定義 6.1.1.  $\mathbb{C}$  上線形な半単純アーベル圏  $\mathcal{C}$  に対し、 $\mathcal{C}$  上のモジュラー関手とは以下のデータのことである。

- 有限集合  $A$  と  $M \in \mathcal{C}^{\boxtimes A}$  に対し、正則特異点を持つ接続付きの  $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  上のベクトル束  $\langle M \rangle$ 。
- 正則特異点を持つ接続付きのベクトル束の同型

$$\langle M \rangle_{X'} \otimes \langle N \rangle_{X''} \simeq \langle M \boxtimes N \rangle_{X' \sqcup X''}.$$

但し  $\langle M \rangle_X$  は  $X \in \overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  での  $\langle M \rangle$  のファイバー。

- symmetric な対象  $R \in \mathcal{C}$ 。
- 有限集合  $A$  と相異なる二元  $\alpha, \beta \in A$  及び  $M \in \mathcal{C}^{\boxtimes A'}$  ( $A' := A \setminus \{\alpha, \beta\}$ ) に対し、正則特異点を持つ接続付きベクトル束の同型

$$G_{\alpha, \beta} : \langle M \boxtimes R \rangle \xrightarrow{\sim} S_{\alpha, \beta}^* \mathrm{Sp}(\langle M \rangle).$$

- 元  $1 \in \mathcal{C}$ 。
- 各  $\alpha \in A$  及び  $M \in \mathcal{C}^{\boxtimes A}$  に対し、正則特異点を持つ接続付きベクトル束の同型

$$G_\alpha : \langle M \boxtimes 1 \rangle \xrightarrow{\sim} F_\alpha^* \langle M \rangle.$$

但し  $F_\alpha : \mathfrak{M}_{*,A} \rightarrow \mathfrak{M}_{*,A/\{\alpha\}}$  はラベル  $\alpha$  を忘れる射。

これらは以下の条件を満たすものとする。

- $M \mapsto \langle M \rangle_X$  は  $M$  に関し関手的。
- $M \mapsto \langle M \rangle_X$  は自然な  $\mathcal{G}_A$  作用に関し同変。
- 同型  $G_{\alpha, \beta}$  と  $G_\alpha$  は有限次元  $\mathbb{C}$  線形空間のなす圏での可換射、結合射、単位射と整合的。
- $\langle 1 \rangle_{(\mathbb{P}^1, 3 \text{ 点})} = \mathbb{C}$ 。

次に中心拡大付きのモジュラー関手を導入する。

定義.  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  を安定な点付き曲線の普遍族とする。 $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  上の行列束 (determinant line bundle) を次で定義する。

$$Q := (\det R\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}})^{-1}.$$

\*4 Bakalov-Kirillov の Lemma 6.3.15.

注意.  $s \in \overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$  での  $Q$  のファイバーは  $Q_s = \bigotimes_{i \geq 0} (\det H^i(X_s, \mathcal{O}_{X_s}))^{(-1)^{i+1}}$  となっている。但し  $X_s$  は  $s$  に対応する点付き曲線。

定義 6.1.2. 中心電荷  $c \in \mathbb{C}$  の  $\mathcal{C}$  モジュラー関手を定義 6.1.1 で「正則特異点を持つ接続つきベクトル束の同型」を「局所自由  $\mathcal{D}_{Q^{-c/2}}$  加群の同型」に置き換えたものとして定める。但し  $\mathcal{D}_{Q^{-c/2}}$  は直線束  $Q^{-c/2}$  上の捻じれ微分作用素 (twisted differential operators) の層<sup>\*5</sup>。

## 6.2 WZW モジュラー関手

$\mathfrak{g}$  を有限次元半単純 Lie 代数、 $\widehat{\mathfrak{g}}$  を付随するカレント Lie 代数とする。

記号. レベル  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の可積分  $\widehat{\mathfrak{g}}$  表現のなす圏を  $\mathcal{O}_k^{\text{int}}(\widehat{\mathfrak{g}})$  と書く。これは半単純アーベル圏である。<sup>\*6</sup>

定理 6.2.1 (Bakalov-Kirillov<sup>\*7</sup>). 圏  $\mathcal{O}_k^{\text{int}}(\widehat{\mathfrak{g}})$  について、

$$\boxtimes_i \widehat{M}_i \longmapsto \langle \boxtimes_i \widehat{M}_i \rangle_X := C_{V_k(\mathfrak{g})}(X, (x_i), (\widehat{M}_i))$$

で中心電荷  $c = c(k) = k \dim \mathfrak{g} / (k + h^\vee)$  の  $\mathcal{O}_k^{\text{int}}(\widehat{\mathfrak{g}})$  モジュラー関手が定まる。

## 参考書

B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, AMS (2001) の第 6,7 章.

以上です。

<sup>\*5</sup> Bakalov-Kirillov の §6.6 を参照。

<sup>\*6</sup> 単純対象は既約表現  $L_\lambda^k$  ( $\lambda \in P_{+,k}$ ) で与えられる。但し  $P_{+,k} := \{\lambda \in P_+ \mid (\lambda, \theta^\vee) \leq k\}$ 。

<sup>\*7</sup> この形の主張は Bakalov-Kirillov の §7.9 によるが、次の文献の結果をリボン圏を用いて言い換えたもの、という側面もある。

Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y., *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988), 297–566.

なおこの論文は次の物理学者による論文のアイデアを数学的に精密化したものという側面もある。

Friedan, D., Shenker S., *The analytic geometry of two dimensional conformal field theory*, Nucl. Phys. **B281** (1987), 509–545.