2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 26 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。期限は**次回 1 月 16 日 (月) の講義まで**です。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

今回は指標公式を扱います。

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純 Lie 代数とする。$\mathfrak{h} = \langle h_1, \ldots, h_l \rangle \subset \mathfrak{g}$ を Cartan 部分代数と呼んだ。$\mathfrak{h}^*$ の和を乗法的に表す記号 e^λ を用いることにする。つまり $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ となる。

$V = (V, \rho)$ を $\mathfrak{g}$ のウェイト表現とする。これは次のように直和分解されるのであった。

$$V = \oplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu, \quad V_\mu := \{v \in V \mid \rho(h)v = \mu(h)v \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

この分解を**ウェイト空間分解**と呼ぶ。ウェイト表現 V の**指標**とは次の形式和のことであった。

$$\operatorname{ch} V := \sum_\mu \dim V_\mu \cdot e^\mu$$

レポート問題 1 ($\star\star$ トレースと指標)**.** $\Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ $(i = 1, \ldots, l)$ を $(\Lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}$ なるものとして定める。ここで $\alpha_i^\vee := 2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$ は単純ルート α_i に対応する余ルートである。
(1) $x_i := e^{\Lambda_i}$ とすると任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し $e^\lambda = \prod_{i=1}^l x_i^{\lambda(h_i)}$ となることを説明せよ。
(2) 任意のウェイト表現 V について $\operatorname{ch} V = \operatorname{tr}_V(x_1^{\rho(h_1)} \cdots x_l^{\rho(h_l)})$ となることを示せ。

レポート問題 2 ($\star\star$ Verma 表現の指標)**.** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする。
(1) 最高ウェイト λ の Verma 表現 $M(\lambda)$ の定義を述べよ。
(2) $M(\lambda)$ の指標が以下のようになることを示せ。

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta_+}(1 - e^{-\alpha})}.$$

$M(\lambda)$ は一般に可約な表現で、商をとることで既約表現 $L(\lambda)$ が得られるのであった。その指標を計算するのに Weyl 群を導入する必要がある。

$\mathfrak{h}^*$ からそれ自身への写像 s_i $(i = 1, \ldots, l)$ を次で定義する。

$$s_i(\lambda) := \lambda - (\alpha_i^\vee, \lambda)\alpha_i.$$

s_i を**単純鏡映**と呼ぶ。

レポート問題 3 ($\star\star\star$ 単純鏡映)**.** (1) s_i が (内積 $(\cdot, \cdot)$ に関して) α_i に直交する平面での鏡映変換を表すことを説明せよ。また $s_i^2 = \mathrm{id}$ となることを確認せよ。
(2) $(s_i s_j)^{m_{i,j}} = \mathrm{id}$ を示せ。但し $m_{i,j}$ は Cartan 行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^l$ から以下で決まる自然数とする。

$a_{i,j}a_{j,i}$	0	1	2	3	≥ 4
$m_{i,j}$	2	3	4	6	∞

s_i 達の生成する ($\mathfrak{h}^*$ の自己同型群の部分) 群を $\mathfrak{g}$ の **Weyl 群**と呼ぶ。この時次の事実が成り立つ。

事実 1. 既約表現 $L(\lambda)$ の指標は Weyl 群不変である。

[*1] 2016/12/26 版, ver. 1.0

レポート問題 4 (⋆⋆ 指標の Weyl 群不変性)**.** 事実 1 を以下の問に従って示せ。
(1) 問題 1 の記号 x_i を用いて $x^h := x_1^{\rho(h_1)} \cdots x_l^{\rho(h_l)}$ と定める。この時、事実 1 を示すには $s_i(x^h) = r_i x^h r_i^{-1}$ なる可逆な線形変換 $g : L(\lambda) \to L(\lambda)$ を見つければ十分であることを説明せよ。但し $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, L(\lambda)$ は表現を定める写像。
(2) $r_i := e^{\rho(e_i)} e^{-\rho(f_i)} e^{\rho(e_i)}$ とすれば (1) が満たされることを確認せよ。

Weyl 群の作用を用いると $L(\lambda)$ の指標を明示できる。結果は次の通り。

事実 2 (**Weyl の指標公式**)**.** W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とすると

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{|w|} e^{w(\lambda+\rho)}}{e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})}.$$

但し $|w|$ は w を s_i 達の積で最短表示した時の積の長さを表す。また分母の $\rho = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha/2$ は Weyl ベクトル。

レポート問題 5 (⋆⋆ A 型の Weyl 群)**.** Cartan 行列を A とする有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ について、$\mathfrak{g}(A)$ の Weyl 群を $W(A)$ と書く。
(1) $W(A_n)$ が対称群と同型であることを示せ。
(2) Weyl 群の元 w で $|w|$ が最大のものを最長元と呼ぶ。$W(A_n)$ の最長元を求めよ。

通常問題

レポート問題 6 (⋆⋆⋆ 脇本表現)**.** $\kappa \in \mathbb{C}$ とする。生成元が a_n, β_n, γ_n $(n \in \mathbb{Z})$, 定義関係式が

$$[a_m, a_n] = \kappa m \delta_{m+n,0}, \quad [a_m, \beta_n] = [a_m, \gamma_n] = 0, \quad [\beta_m, \beta_n] = [\gamma_m, \gamma_n] = 0, \quad [\beta_m, \gamma_n] = \delta_{m+n,0}$$

である Lie 代数 (Heisenberg 代数と $\beta\gamma$ 系の直和) を考える。$a(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$, $\beta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n z^{-n-1}$, $\gamma(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n z^{-n}$ とする。更に $k \in \mathbb{C}$ として

$$e(z) := \beta(z), \quad h(z) := -2 : \gamma(z)\beta(z) : + a(z), \quad f(z) :=: \gamma(z)^2 \beta(z) : + \gamma(z) a(z) + k\gamma'(z)$$

とする。$k = \kappa + 2$ の時 $e(z), h(z), f(z)$ がカレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の定義関係式を満たすことを示せ。

この問題の結果から、アフィン頂点代数 $V_k(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の頂点代数加群 W_k を前半の $a(z), b(z), c(z)$ のなす代数の Fock 表現から作ることができる。W_k を $V_k(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の脇本表現[*2]と呼ぶ。

以上です。

[*2] M. Wakimoto, *Fock representations of the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, Comm. Math. Phys. **104** (1986), no. 4, 605–609.