2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 26 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5 頂点代数束

5.4 アフィン Lie 代数の場合

$\mathbb{P}^1$ 上のアフィン頂点代数 $V = V_k(\mathfrak{g})$ に関する共形ブロックの空間 $C_{V_k(\mathfrak{g})}(\mathbb{P}^1, (x_i), (M_i))$ を考えよう。

記号. $\mathbb{P}^1$ 上の (大域的) 座標 t をとり、$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{P}^1$ を異なる n 点とする。

$\mathfrak{g}$ 表現 M と $k \in \mathbb{C}$ に対し、$\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現 $\widehat{M}^k$ を次のように定義する。

$$\widehat{M}^k := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{g} \oplus t\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K}^{\widehat{\mathfrak{g}}} M.$$

線形空間としては $\widehat{M}^k \simeq U(\mathfrak{g} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \otimes_{\mathbb{C}} M$. これは smooth な $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現なので §3 より $V_k(\mathfrak{g})$ 加群である。

$\mathfrak{g}$ 表現 $M_1, \ldots, M_n$ に対し上記と同様に定義される $V_k(\mathfrak{g})$ 加群を $\widehat{M}_i^k$ と書く。ここで**レベル k は共通**である。$\widehat{M}_i^k$ を点 $x_i \in \mathbb{P}^1$ に配置した時の共形ブロックを考えたい。簡単のため x_i 達は $\mathbb{A}^1 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ に含まれていると仮定して $Z := \mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{P}^1$ と定める。次のように制限した共形ブロックの空間を考える。

$$C_V^0(\mathbb{P}^1, (x_i), (\widehat{M}_i^k)) := \mathrm{Hom}_{U_Z(V)} \left(\bigotimes_{i=1}^n \widehat{\mathcal{M}}_{i,x_i}, \mathbb{C} \right).$$

補題. 制限写像 $\tau \longmapsto \tau|_{\otimes_{i=1}^n M_i}$ は次の線形同型を与える。

$$C_V^0(\mathbb{P}^1, (x_i), (\widehat{M}_i^k)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \left(\bigotimes_{i=1}^n M_i, \mathbb{C} \right).$$

次に $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を動かしてみよう。共形ブロックの空間に関する諸定義を $\mathbb{C}$ 上のものから

$$\mathcal{B}_n := \mathbb{C}[\mathbb{A}^n \setminus \Delta] = \mathbb{C}[x_i, (x_i - x_j)^{-1}]$$

の上のものに取り換えて考える。また $\widehat{\mathfrak{g}}(\overrightarrow{x})$ を Lie 代数の中心拡大

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_n \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}(\overrightarrow{x}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}((t - x_i)) \longrightarrow 0$$

として定める。ここで $\mathcal{B}_n$ は可換 Lie 代数と思っている。$\widehat{\mathfrak{g}}(\overrightarrow{x})$ は次のような部分代数を持っている。

$$\mathfrak{g}^0(\overrightarrow{x}) := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}_n^0, \quad \mathcal{B}_n^0 := \left\{ f(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_i, (x_i - x_j)^{-1}, t, (t - x_i)^{-1}] \mid f(\infty, x_1, \ldots, x_n) = 0 \right\}.$$

また簡単のため $M := \bigotimes_{i=1}^n M_i$, $\widehat{M} := \bigotimes_{i=1}^n \widehat{M}_i^k$ と書くことにすると、$\mathcal{B}_n$ 加群

$$C_V^0(\widehat{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^0(\overrightarrow{x})}(\widehat{M}, \mathcal{B}_n)$$

は $\mathbb{A}^n \setminus \Delta$ 上のベクトル束と思える。その $(x_1, \ldots, x_n)$ での stalk は

$$C_V^0(\mathbb{P}^1, (x_i), (\widehat{M}_i^k)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C}) = M^*.$$

で与えられる。また $C_V^0(\widehat{M})$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{M}, \mathcal{B}_n)$ の部分束である。

$k + h^\vee \neq 0$ と仮定して $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{M}, \mathcal{B}_n)$ 上の作用素

$$\nabla_i := \frac{\partial}{\partial x_i} - L_{-1}^{(i)*}$$

[*1] 2017/01/16 版, ver. 1.2.

を考える。ここで L_{-1}^* は L_{-1}^M の随伴。L_{-1}^M が Virasoro 元

$$\omega_{\mathfrak{g},k} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{a,-1} J_{-1}^a v_k.$$

から $Y_M(\omega_{\mathfrak{g},k}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^M z^{-n-2}$ と展開して得られたことを思い出そう。

定理 5.4.1.

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\Xi_i}{k+h^\vee}, \quad \Xi_i := \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{j\neq i} \frac{(J^a)^{(j)}(J_a)^{(i)}}{x_i - x_j} = \sum_{j\neq i} \frac{\Omega_{ij}}{x_i - x_j}.$$

但し Ω_{ij} は i,j テンソル成分での Casimir 作用素 $\Omega := \sum_a J^a \otimes J_a$ である。

特に ∇_i の水平切断は $\Phi : \mathbb{A}^n \setminus \Delta \to M^*$ 上の函数 Φ で

$$(k+h^\vee)\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi = \Xi_i \Phi$$

を満たすものである。この方程式を **KZ 方程式**[*2]と呼ぶ。

定理 5.4.1 の略証. ∇_i の $C_V^0(\widehat{M})$ での作用を計算すればよい。$\eta \in M^*$ を取ると埋め込み $M_i \hookrightarrow \widehat{M}_i^k = U(\mathfrak{g}\otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \otimes M_i$ に関する持ち上げ $\widetilde{\eta} \in \widehat{M}^*$ が一意に定まる。$v \in M \subset \widehat{M}$ に対し

$$\left((L_{-1})^{(i)*}\widetilde{\eta}\right)(v) = \widetilde{\eta}\left((L_{-1})^{(i)} v\right)$$

を計算したい。$J_m^a v = \delta_{m,0} J^a v$ $(m \geq 0)$ なので

$$(L_{-1})^{(i)} v = \frac{1}{k+\mathfrak{h}^\vee} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} (J_{-1}^a)^{(i)} (J_a)^{(i)} v. \tag{5.4.1}$$

一方 $[\nabla_i, \mathfrak{g}^0(\overrightarrow{x})] \subset \mathfrak{g}^0(\overrightarrow{x})$ が確認できる。これと $J^a/(t-x_i) \in \mathfrak{g}^0(\overrightarrow{x}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}_n^0$ から

$$\widetilde{\eta}\left(\frac{J^a}{t-x_i}\widehat{v}\right) = 0 \tag{5.4.2}$$

が任意の $\widehat{v} \in \widehat{M}$ に対し成立する。展開 $1/(t-x_i) = -\sum_{l=0}^\infty (x_i - x_j)^{l+1}/(t-x_j)^l$, から $\mathfrak{g}(\overrightarrow{x})$ において

$$\frac{J^a}{t-x_i} = (J_{-1}^a)^{(i)} - \sum_{j\neq i}\sum_{l=0}^\infty \frac{(J_l^a)^{(j)}}{(x_i-x_j)^{l+1}} \tag{5.4.3}$$

となる。(5.4.2) と (5.4.3) を合わせると

$$\widetilde{\eta}\left((J_{-1}^a)^{(i)}\widehat{v}\right) = \sum_{j\neq i}\sum_{l=0}^\infty \frac{\widetilde{\eta}\left((J_l^a)^{(j)}\widehat{v}\right)}{(x_i-x_j)^{l+1}}$$

が任意の $\widehat{v} \in \widehat{M}$ で成立する。これを (5.4.1) に適用して

$$\widetilde{\eta}(L_{-1}^{(i)} v) = \frac{1}{k+\mathfrak{h}^\vee} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{j\neq i}\sum_{l=0}^\infty \frac{\widetilde{\eta}\left((J_l^a)^{(j)}(J_a)^{(i)}v\right)}{(x_i-x_j)^{l+1}} = \frac{1}{k+\mathfrak{h}^\vee} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{j\neq i} \frac{\widetilde{\eta}\left((J^a)^{(j)}(J_a)^{(i)}v\right)}{x_i - x_j}.$$

を得る。任意の $v' \in M$ に対し $\widetilde{\eta}(v') = \eta(v')$ なので

$$\left(L_{-1}^{(i)*}\widetilde{\eta}\right)(v) = \frac{\Xi_i}{k+h^\vee}\eta(v).$$

□

[*2] V. Knizhnik, A. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B 247** (1984) 83–103.

6　有理的共形場理論

Bakalov と Kirillov に従ってモジュラー函手とモジュラーテンソル圏を導入し、両者の同値性を述べる。C_2 有限性を持つ有理的頂点代数に付随したモジュラー函手によって有理的共形場理論の数学的定義を与える。WZW 模型についても扱う。

6.1　モジュラー函手

記号. (1) 滑らかで連結な複素曲線 C とその上の相異なる点 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (marked points と呼ぶ) の組 $(C, \{x_1, \ldots, x_n\})$ を点付き曲線と呼ぶ。点付き曲線が**安定**であるとは $2g(C) - 2 + n > 0$ の時を言う。但し $g(C)$ は C の種数。
(2) 有限集合 A に対し安定な点付き曲線の非連結和と全単射 $\{\text{marked points}\} \xrightarrow{\sim} A$ の組の集合を $\mathfrak{M}_{*,A}$ と書く。
(3) $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$ を $\mathfrak{M}_{*,A}$ の Deligne-Mumford コンパクト化とする。これは Deligne-Mumford スタックの構造を持つ。

記号. (1) $D := \overline{\mathfrak{M}}_{*,A} \setminus \mathfrak{M}_{*,A}$ を正規交差因子 (normal crossing divisor) からなる境界とする。
(2) $D^k \subset D$ を $k+1$ 個の 2 重点を持つ曲線からなる余次元 k の部分スタックとする。
(3) $N(D^0)$ を D^0 の $\overline{\mathfrak{M}}_{*,A}$ における法束 (normal bundle) とし、$N^\times(D^0)$ を $N(D^0)$ における零切断の complement とする。

定義. (1) アーベル圏の対象 S が**単純**であるとは任意の単射 $A \to S$ が 0 または同型であることを言う。
アーベル圏が**半単純**であるとは各対象が単純対象の有限直和と同型であることを言う。
(2) 直和 $\bigoplus$ を持つ圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\bigoplus_i A_i \boxtimes B_i$ $(A_i, B_i \in \mathcal{C})$ という形の対象からなる圏を ind-$\mathcal{C}^{\boxtimes 2}$ と書く。
(3) $R \in$ ind-$\mathcal{C}^{\boxtimes 2}$ は同型 $s : R^{\mathrm{op}} \to R$ であって $s^{\mathrm{op}} \circ s = \mathrm{id}$ なるものがあるとき**対称** (symmetric) と呼ばれる。但し $(A \boxtimes B)^{\mathrm{op}} := B \boxtimes A$.

参考書

E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, AMS (2004) の Chapter 6, 9, 10.
B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, AMS (2001).

以上です。