**2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 19 日分のレポート問題**[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。期限は**次回 12 月 26 日 (月) の講義まで**です。

## 代数的な概念に慣れていない人のための問題

引き続き有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を考える。$\mathfrak{g}$ の直和分解 (三角分解)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-, \quad \mathfrak{n}_+ := \langle e_1, \ldots, e_l \rangle, \ \mathfrak{h} := \langle h_1, \ldots, h_l \rangle, \ \mathfrak{n}_- := \langle f_1, \ldots, f_l \rangle$$

からルートの集合 $\Delta := \Delta_+ \sqcup \Delta_- \subset \mathfrak{h}^*$ が決まり、また $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対し $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = \alpha(h)x, \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$ と定めると、$\mathfrak{g}$ は以下のように直和分解されるのだった。

$$\mathfrak{g} \ = \ \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \ = \ \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \ = \ \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}e_\alpha \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}f_\alpha. \qquad (\heartsuit)$$

より一般に、$\mathfrak{g}$ 表現 $V$ と線形写像 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が与えられた時、($V$ の) **ウェイト $\lambda$ のウェイト空間** $V_\lambda$ とは

$$V_\lambda := \{v \in V \mid x.v = \lambda(x)v, \ \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

で定義される $V$ の部分空間のことである。但し $x.v$ で $x \in \mathfrak{g}$ の $v \in V$ への作用を表した。ウェイト空間の 0 でない元のことを**ウェイトベクトル**と呼ぶ。**$\mathfrak{g}$ 表現 $V$ のウェイト**とは $V_\lambda \neq 0$ なる $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のことである。

$\mathfrak{g}$ 表現 $V$ が**ウェイト表現**であるとは $V = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ と $V$ がウェイト空間に直和分解される時を言う。

**レポート問題 1** ($*$ ルートとウェイト)**.** $\mathfrak{g}$ のルートとは $\mathfrak{g}$ 自身を $\mathfrak{g}$ の随伴表現とみなした時のウェイトに他ならないことを確認せよ。また冒頭の直和分解 ($\heartsuit$) より $\mathfrak{g}$ がウェイト表現であることを確認せよ。

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Delta_+$ を $\mathfrak{g}$ の単純ルートとする。$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し、$\lambda - \mu = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), 即ち単純ルートの**非負整数**の線形結合で書ける時 $\lambda \geq \mu$ と定めることにすると、$\geq$ は半順序になる。$\mathfrak{g}$ 表現 $V$ の**最高ウェイト**とは、$V$ のウェイト $\lambda$ であって他の全てのウェイト $\mu$ について $\lambda > \mu$ となるもののことである。最高ウェイトを持つ $\mathfrak{g}$ のウェイト表現を**最高ウェイト表現**と呼ぶ。

問題 1 より $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 自身の随伴表現とみなした時ウェイト表現であった。実はそれは最高ウェイト表現である。随伴表現 $\mathfrak{g}$ の最高ウェイトを**最高ルート**と呼ぶ。

**レポート問題 2** ($**$ 最高ルート)**.** (1) 前回の問題より、$\mathfrak{g}(C_2)$ について、単純ルートを $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ として正のルートの集合は $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$ と書ける。この表記を用いて $\mathfrak{g}(C_2)$ の最高ルートを求めよ。
(2) $\mathfrak{g}(A_l)$ の最高ルートを求めよ。

次にルートの標準内積と不変内積の規格化について説明する。以下、有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ の最高ルートを $\theta$ と書く。また単純ルート $\alpha_i$ ($i = 1, \ldots, l$) の張る $\mathbb{Z}$ 加群を $Q := \sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ と書く。実は $Q = \oplus_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i$ である。またルートが単純ルートの整数係数の線形結合で書けることから $\Delta \subset Q$ 及び $Q = \mathbb{Z}\Delta = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha$ が成立する。更に ($\mathbb{Z}$ 上の) 双線形写像 $(\cdot,\cdot) : Q \times Q \to \mathbb{Q}$ を

$$2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = a_{i,j} \quad (i,j = 1, \ldots, l), \quad (\theta, \theta) = 2 \qquad (\spadesuit)$$

となるようにとる事ができる。但し $a_{i,j}$ は Cartan 行列 $A$ の $(i,j)$ 成分。この双線形写像 $(\cdot,\cdot)$ を ($\mathfrak{g}$ のルート系の) **標準内積**と呼ぶ。$(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$ や $(\alpha, \alpha) = \alpha^2$ とも書く。

[*1] 2016/12/18 版, ver. 1.0

実は $A, D, E$ 型では全ての単純ルートについて $\alpha_i^2 = 2$ となる。また $B, C, F$ 型では $\alpha_i^2 = 2$ または 1. 更に $G_2$ 型では $\alpha_1^2 = 2/3$, $\alpha_2^2 = 2$ となる。

**レポート問題 3** ($\star\star$ ルート系の内積). (1) $A_l$ 型に関して、単純ルートについては $(\alpha_i, \alpha_j) := a_{i,j}$ と定め、それを線形に拡張して $(\cdot, \cdot)$ を定義すれば $(\theta, \theta) = 2$ となることを確認せよ。
(2) $C_2$ 型について $(\alpha_i, \alpha_j)$ を書き下すことで ($\spadesuit$) を確認せよ。

ルート $\alpha \in \Delta$ に対し $\alpha^\vee := 2\alpha/\alpha^2 \in \mathfrak{h}^*$ を ($\alpha$ に対応する) **余ルート**[*2]と呼ぶ。$Q_\mathbb{Q} := \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Q}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ と定めれば $\alpha^\vee \in Q_\mathbb{Q}$ である。ルート系の標準内積を $\mathbb{Q}$ 上で線形に拡張することで双線形形式 $(\cdot, \cdot) : Q_\mathbb{Q} \times Q_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ を得る。これもルート系の標準内積と呼ぶことにする。

**レポート問題 4** ($\star$ 余ルートと Cartan 行列). $a_{i,j} = (\alpha_i^\vee, \alpha_j)$ となることを確認せよ。

ここで前回導入した不変内積を思い出そう。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ で $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$ が任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対し成り立つものを不変内積と呼んだ。有限次元単純 Lie 代数については不変内積の規格化はルート系の標準内積を用いて次のようにすることが多い (但し $\{h_i\}_{i=1}^{l}$ は $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ の基底)。

$$B(h_i, h_j) = (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee). \tag{$\diamondsuit$}$$

最後に Casimir 元の最高ウェイト表現への作用を調べる。有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{J^a\}_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ を一つ選ぶ。$B$ を $\mathfrak{g}$ の 0 でない不変内積とし $g^{a,b} := B(J^a, J^b) \in \mathbb{C}$ と定める。行列 $(g^{a,b})_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ は正則で、その逆行列を $(g_{a,b})_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ と書く。この時 **Casimir 元** $\Omega := \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} g_{a,b} J^a J^b \in U(\mathfrak{g})$ は任意の $x \in \mathfrak{g}$ と可換であった。

**レポート問題 5** ($\star\star$ Casimir 元の作用). 三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ において $\mathfrak{n}_\pm$ の基底 $\{e_{\pm\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+\}$ を

$$[h_i, e_\alpha] = (\alpha_i^\vee, \alpha), \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = \textstyle\sum_{i=1}^{l} m_i(\alpha^\vee) h_i, \quad B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 2/\alpha^2$$

と選ぶことができる。但し 2 番目の式の $m_i(\alpha^\vee)$ は $\alpha^\vee$ を $\alpha^\vee = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i^\vee$ と書いた時の係数 $m_i$ を表す。また 3 番目の式の $B$ は不変内積であって ($\diamondsuit$) で規格化されているものとする。このことを認めて以下の問いに答えよ。
(1) 次の等式が成立することを確認せよ。

$$\Omega = \textstyle\sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\alpha^2}{2}(e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha) = \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha^2 \big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} m_i(\alpha^\vee) \lambda(h_i) + e_{-\alpha} e_\alpha\big).$$

但し $\{h^i\}_{i=1}^{l} \subset \mathfrak{h}$ は ($B(h_i, h^j) = \delta_i^j$ を満たすという意味での) $B$ に関する $\{h_i\}_{i=1}^{l}$ の双対基底である。
(2) $v_\lambda$ をある $\mathfrak{g}$ 表現の元であってウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のウェイトベクトルだとする。更に任意の $\alpha \in \Delta_+$ について $e_\alpha v_\lambda = 0$ だと仮定する。この時

$$\Omega.v_\lambda = v_\lambda(\lambda, \lambda + 2\rho)$$

となることを示せ。但し $\rho := \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha/2 \in \mathfrak{h}^*$ (**Weyl ベクトル**と呼ばれる)。

## 通常問題

**レポート問題 6** ($\star\star$ Borcherds の Lie 代数). $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ を頂点代数とする。命題 5.2.2 の右辺に登場した

$$U(V) := V \otimes \mathbb{C}((t)) / \operatorname{Im}(T \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \partial_t).$$

が以下の Lie 括弧により Lie 代数の構造を持つことを確かめよ。

$$[A_{[m]}, B_{[n]}] := \textstyle\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} (A_{(n)} B)_{[m+k-n]}.$$

但し $A_{[n]} \in U(V)$ は $A \otimes t^n \in V \otimes \mathbb{C}[[t]]$ の剰余類。また $A_{(n)} \in \operatorname{End} V$ は] $Y(A, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$ と展開した時の係数。

以上です。

[*2] coroot の訳語です。日本語でもコルートと呼ぶことが多いです。