2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 19 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5 頂点代数束

5.1 定義

定義. X を曲線、V を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き CVA とする。
(1) 点 $x \in X$ に対し $\mathcal{V}_x := \mathcal{A}ut_x \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} V$.
(2) $\mathcal{A}ut_X := X \times \mathcal{A}ut_x$. 射影 $\mathcal{A}ut_x \twoheadrightarrow X$ により $\mathcal{A}ut_x$ は X 上の $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$-torsor である。
(3) V の各斉次部分 V_n が有限次元だとする。この時 V に付随した X 上の**頂点代数束** $\mathcal{V}_X$ を次で定義する。

$$\mathcal{V}_X := \mathcal{A}ut_X \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} V.$$

$V = (V, |0\rangle, T, Y)$ の Y から $\mathcal{V}_X$ の切断を構成することができる。以下 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_X$ 等と略記する。

記号 5.1.2. D_x の座標 z は同型

$$\iota_z : V[[z]] \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_x, \mathcal{V})$$

を定める。更にそれは $\mathcal{V}_x$ と $\mathcal{V}^*$ の x でのファイバーの自明化を誘導する。それらを次のように書く。

$$V \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_x, \quad v \longmapsto (z, v); \qquad V^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_x^*, \quad \varphi \longmapsto (z, \varphi).$$

命題 5.1.3 (Frenkel,Ben-Zvi, §6.5.4 Theorem-Definition)**.** 自然なペアリング $\langle , \rangle : V^* \times V \to \mathbb{C}$ を用いて

$$\langle (z, \varphi), \mathcal{Y}_x(\iota_z(A)) \cdot (z, v) \rangle = \langle \varphi, Y(A, z) v \rangle$$

とすると、$\mathcal{Y}_x$ は次のような線形写像として well-defined になる。

$$\mathcal{Y}_x : \Gamma(D_x^{\times}, \mathcal{V}_X^*) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}_x).$$

記号. (1) 点 $x \in X$ に対し、Ω_x で $D_x^{\times}$ 上の微分 (1 形式) のなす線形空間を書く。
(2) $\mathrm{Res}_x : \Omega_x \to \mathbb{C}$ を留数写像 $f(z)dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n dz \mapsto \mathrm{Res}_x f(z)dz = f_{-1}$ とする。

Res_x は次のような非退化なペアリングを定める。

$$\Gamma(D_x^{\times}, \mathcal{V}_X^*) \otimes \Gamma(D_x^{\times}, \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\phi, \mu) \longmapsto \mathrm{Res}_x \langle \phi, \mu \rangle,$$

但し Ω_X は X 上の微分 (1 形式) のなす層。これを用いて

定義. 線形写像 $\mathcal{Y}_x^{\vee}$ を次で定義する。

$$\mathcal{Y}_x^{\vee} : \Gamma(D_x^{\times}, \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{V}_x), \quad \mu \longmapsto \mathrm{Res}_x \langle \mathcal{Y}_x, \mu \rangle.$$

5.2 平坦接続と 1 点共形ブロック

引き続き $V = (V, \omega)$ を CVA, X を曲線とする。自明化の記号 5.1.2 を用いることにする。

定理 5.2.1 (Frenkel, Ben-Zvi, §6.6.3 Theorem)**.** $U \subset X$ を開集合、z を局所座標とする。$\nabla|_U$ を

$$\nabla|_U : \mathcal{V}_X|_U \to (\mathcal{V}_X \otimes \Omega_X)|_U, \quad \nabla_{\partial_z} := \partial_z + L_{-1}$$

で定めると $\{\nabla|_U \mid U \subset X \text{ 開集合 }\}$ は接続 $\nabla : \mathcal{V}_X \to \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X$ を定める。

[*1] 2016/12/19 版, ver. 0.2

定義. (1) X 上の層 $\mathcal{H}_X$ を次で定める。

$$\mathcal{H}_X := \mathrm{Coker}(\nabla : \mathcal{V}_X \to \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X).$$

(2) Zariski 開集合 $Z \subset X$ 及び点 $x \in X$ に対し

$$U_Z(V) := \Gamma(Z, \mathcal{H}_X), \quad U_x(V) := \Gamma(D_x^\times, \mathcal{H}_X)$$

命題 5.2.2. $x \in X$ での形式的座標 t を選ぶと

$$U_x(V) \xrightarrow{\sim} U(V) := V \otimes \mathbb{C}((t)) / \operatorname{Im}(T \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \partial_t).$$

更に右辺は次のような Lie 代数の構造を持つ。

$$[A_{[m]}, B_{[n]}] := \sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} (A_{(n)}B)_{[m+k-n]}.$$

但し $A_{[n]} \in U(V)$ は $A \otimes t^n \in V \otimes \mathbb{C}[[t]]$ のクラス。

線形写像 $\mathcal{Y}_x^\vee : \Gamma(D_x^\times, \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}_x)$ は $U_x(V)$ を経由することに注意する (全微分の留数は 0 なので)。

補題 5.2.3. $\mathcal{Y}_x^\vee : U_x(V) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}_x)$ は Lie 代数の準同型である。

命題 5.2.4 (Frenkel, Ben-dvi, §9.2.6 Theorem)**.** $\mathcal{H}_X$ は Lie 代数の層である。

従って $U_Z(V)$ は Lie 代数である。また任意の $x \in Z$ について、切断の $D_x^\times \subset Z$ への制限は Lie 代数準同型 $U_Z(V) \to U_x(V)$ を与える。$U_Z(V) \to U_x(V)$ と $\mathcal{Y}_x^\vee$ が Lie 代数準同型なので、$\mathcal{V}_x$ は $U_Z(V)$ 表現と思える。

定義 5.2.5. $x \in X$ とする。(X, x, V) に付随する**共形ブロックの空間** $C(X, x, V)$ を次で定義する。

$$C(X, x, V) := \mathrm{Hom}_{U_{X \setminus x}(V)}(\mathcal{V}_x, \mathbb{C}),$$

ここで $\mathbb{C}$ は Lie 代数 $U_Z(V)$ の自明表現。また $C(X, x, V)$ の元を**共形ブロック**と呼ぶ。

注意. 線形写像 $\varphi : \mathcal{V}_x \to \mathbb{C}$ が共形ブロックであるためには、任意の $A \in \mathcal{V}_x$ に対して $\langle \varphi, \mathcal{Y}_x(A) \rangle$ が $X \setminus x$ 上での $\mathcal{V}_x^*$ の正則切断に延長出来ることが必要十分である。

5.3　加群に対する共形ブロックと多点版

$V = (V, \omega)$ を CVA とする。また X を曲線とする。

定義. **共形 V 加群** $M = (M, Y_M)$ とは V 加群であって、展開 $Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^M z^{-n-2}$ における各 L_n^M が M に半単純に作用するもののこと。

共形 V 加群 M は Virasoro 代数 $\langle L_M^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$ の表現になり、従って $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ の作用を持つ。また半単純性の仮定から $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ 作用は $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ 作用に延長される。

定義. (1) CVA の時と同様に、共形 V 加群 M に対して以下のように記号を定義する。

$$\mathcal{M}_x := \mathrm{Aut}_x \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} M, \quad \mathcal{M}_X := \mathrm{Aut}_X \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} M, \quad \mathcal{Y}_{M,x}^\vee : \Gamma(D_x^\times, \mathcal{V}_X \otimes \Omega_X) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}_x).$$

(2) (X, x, M) に付随する**共形ブロックの空間** $C_V(X, x, M)$ を次で定義する。

$$C_V(X, x, M) := \mathrm{Hom}_{U_{X \setminus x}(V)}(\mathcal{M}_x, \mathbb{C}).$$

$x_1, \ldots, x_n \in X$ を相違なる点とし $Z := X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ と書く。制限写像 $\Gamma(Z, \mathcal{H}_X) \to \bigoplus_{i=1}^n \Gamma(D_{x_i}^\times, \mathcal{H}_X)$ は次のような Lie 代数の準同型を定める。

$$U_Z(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r U_{x_i}(V).$$

一方 $M_1, \dots, M_n$ を共形 V 加群とし、$\mathcal{M}_{i,x_i} := \mathrm{Aut}_{x_i} \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} M$ などと書く。線形写像 $\mathcal{Y}^{\vee}_{M,x_i} : U_{x_i}(V) \to \mathrm{End}(\mathcal{M}_{i,x_i})$ と上の準同型を合成することで、Lie 代数 $U_Z(V)$ を $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_{i,x_i}$ に作用させることができる。

定義 5.3.1. $(X,(x_i),(M_i))$ に付随する**共形ブロックの空間** $C_V(X,(x_i),(M_i))$ を次で定義する。

$$C_V(X,(x_i),(M_i)) := \mathrm{Hom}_{U_Z(V)}\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_{i,x_i}, \mathbb{C}\right).$$

参考書

E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, second edition, AMS 2004 の Chapter 6.

以上です。