2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 12 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。期限は**次回 12 月 19 日 (月) の講義まで**です。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。今回は有限次元 Lie 代数のルート系及び不変内積に関するものです。

前回 12/05 の問題に引き続き有限次元単純 Lie 代数を考える。即ち以下のような l 次正方行列 A に対応した Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ を考える。

$$A_{l\,(\geq 1)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{l\,(\geq 2)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_{l\,(\geq 2)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_{l\,(\geq 4)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_{l(=6,7,8)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & & -1 \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & & \\ & & -1 & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad F_4 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -2 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

定義を復習すると、$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{l}$ と書いた時に、$\mathfrak{g}(A)$ は e_i, h_i, f_i $(i = 1, \ldots, l)$ の $3l$ 個の生成元と以下の定義関係式で定まる Lie 代数であった。

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i \qquad (i, j = 1, \ldots, l),$$
$$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0, \quad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{i,j}+1}(f_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, l,\ i \neq j).$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ は以下のような直和分解を持つ。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-, \quad \mathfrak{n}_+ := \langle e_1, \ldots, e_l \rangle, \ \mathfrak{h} := \langle h_1, \ldots, h_l \rangle, \ \mathfrak{n}_- := \langle f_1, \ldots, f_l \rangle.$$

但し $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ は $x_i \in \mathfrak{g}$ の生成する部分空間を意味する。h_i 達は可換なので $\mathfrak{h} = \oplus_{i=1}^{l} \mathbb{C} h_i$ となることに注意。

ここで非自明な主張を紹介する: $\operatorname{ad}(h_i)$ **の同時固有ベクトルからなる** n_+ **の基底が存在**する。例えば $\mathfrak{g}(A_1)$ なら $n_+ = \mathbb{C} e_1$ だからこれは明らかに成り立つ。

レポート問題 1 ($\star$ 2 次元のルート系)**.** 上で述べた主張を $\mathfrak{g}(A_2)$ と $\mathfrak{g}(C_2)$ について確かめよ。特に $\mathfrak{g}(C_2)$ の場合は $\{e_1,\ e_2,\ [e_1, e_2],\ [e_1, [e_1, e_2]]\}$ が条件を満たす n_+ の基底であることを確かめよ。

上で述べた主張はより詳しく、次のような形で成立する。

[*1] 2016/12/12 版, ver. 1.0.

事実 1. ある有限集合 $\Delta_+ \subset \mathfrak{h}^*$ とそれで添え字付けられる n_+ の基底 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_+}$ であって、各 $\alpha \in \Delta_+$ と各 $i = 1, \ldots, l$ について $[h_i, e_\alpha] = \alpha(h_i)e_\alpha$ となるものが存在する。各 $\alpha \in \Delta_+$ を $\mathfrak{g}(A)$ の**正ルート**と呼ぶ。

レポート問題 2 ($\star$ C_2 のルート系)**.** $\mathfrak{g}(C_2)$ に関して $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{h}^*$ を適切に定め、更に $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$ とれば事実 1 が成立することを確認せよ。

事実 1 では正ルートの集合 Δ_+ や基底 $\{e_\alpha\}$ の一意性について何も述べていない。しかし次のような条件を付けると一意に存在することが知られている。

まず $A = (a_{i,j})_{i.j=1}^l$ に付随する $\mathfrak{g}(A)$ の**単純ルート**を、$\alpha_j \in \mathfrak{h}^*$ $(j = 1, \ldots, l)$ であって $\alpha_j(h_i) = a_{i,j}$ となるものとして定義する。$\mathfrak{g}(A)$ の定義関係式の一つ $[h_i e_j] = a_{i,j}e_j$ を思い出すと、$e_{\alpha_j} := e_j$ とすれば $\alpha_j \in \Delta_+$ と仮定して良さそうである。実際、事実 1 を「単純ルート α_j を全て含むような Δ_+ と $\{e_{\alpha_j} := e_j\}_{j=1}^l$ を含む $\mathfrak{n}_+$ の基底 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_+}$ であって $\cdots$」とすると一意性が言える。以下では常にこの仮定をする。この時更に

事実 2. 任意の正ルートは単純ルートの非負**整数**係数の線形結合にかける。

レポート問題 3 ($\star$ A_l のルート系)**.** 任意の $l \geq 1$ について $\mathfrak{g}(A_l)$ の正ルートを全て決定し、事実 2 を確認せよ。

定義関係式から推測できるように、正ルートと同様に $\mathfrak{n}_-$ では $-\alpha \in \mathfrak{h}^*$ $(\alpha \in \Delta_+)$ を固有値とする固有ベクトル f_α が存在して基底をなす。$\{-\alpha\}_{\alpha\in\Delta_+} \subset \mathfrak{h}^*$ を $-\Delta_+$ あるいは Δ_- と書いて $\mathfrak{g}(A)$ の**負ルート**の集合と呼ぶ。また $\Delta := \Delta_+ \sqcup \Delta_- \subset \mathfrak{h}^*$ を**ルートの集合**と呼ぶ。以上の諸定義から $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ は次のような直和分解を持つ。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}e_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}f_\alpha.$$

但し $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対し $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$.

次に不変内積について復習しよう。一般に Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ で $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$ が任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対し成り立つものを不変内積と呼ぶ。

レポート問題 4 ($\star$ 不変内積)**.** $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ を表現空間を V とする $\mathfrak{g}$ 表現とする。この時 $B_\rho(x, y) := \mathrm{tr}_V\,(\rho(x)\rho(y))$ で定める写像 B_ρ は $\mathfrak{g}$ の不変内積であることを示せ。

有限次元単純 Lie 代数については、不変内積はスカラー倍を除いて一意であり、また (0 でなければ) 非退化であることが知られている。

レポート問題 5 ($\star$ Casimir 元)**.** $\mathfrak{g}$ を有限次元単純 Lie 代数とする。$\mathfrak{g}$ の線形空間としての基底 $\{J^a\}_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ を一つ選ぶ。B を $\mathfrak{g}$ の 0 でない不変内積とし $g^{a,b} := B(J^a, J^b) \in \mathbb{C}$ と定める。上で述べたように B は非退化なので行列 $(g^{a,b})_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ は正則である。その逆行列を $(g_{a,b})_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ と書く。この時 $\Omega := \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{a,b}J^aJ^b \in U(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心元であること、即ち任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し $[x, \Omega] = 0$ となることを示せ。Ω を $\mathfrak{g}$ の **Casimir 元**と言う。

通常問題

レポート問題 6 ($\star$ disc と punctured disc)**.** (1) 形式冪級数環 $\mathcal{O} := \mathbb{C}[[z]]$ の極大イデアルを全て求めよ。
(2) $\mathcal{O}$ の商体 $\mathcal{K} := \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ が形式 Laurent 級数体 $\mathbb{C}((z))$ と同型であることを示せ。

レポート問題 7 ($\star$ 群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$)**.** 講義で導入した $D := \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ の座標変換のなす群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$ を具体的に書いてみる。座標変換 ρ は $z \in \mathcal{O}$ の行先 $\rho(z) \in \mathcal{O}$ を指定することで決まる。ρ は $\mathcal{O}$ の自己同型とみなしたいので、集合としては $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O} := \{\rho(z) = a_1z + a_2z^2 + \cdots \mid a_1 \neq 0\}$ と定義しよう。そして $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$ の群構造を座標変換の合成として $(\rho_1 * \rho_2)(z) := \rho_2(\rho_1(z))$ と定義したい。この $*$ で $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$ が群になることを確認せよ。

以上です。