2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 12 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5 頂点代数束

5.1 定義

以下 conformal vertex algebra のことを CVA と略記する。

命題. $V=(V,\omega)$ を CVA, $Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_n^V z^{-n-2}$ を Virasoro 元に対応する場 $Y(\omega,z)$ の展開とする。この時任意の $A\in V$ に対し

$$[L_n^V, Y(A,z)] = \sum_{m\geq -1}\frac{1}{(m+1)!}(\partial_z^{m+1}z^{n+1})Y(L_m^V A,z).$$

これはベクトル場 $-z^{n+1}\partial_z$ $(n\geq -1)$ の $Y(A,z)$ 上への作用を表していると思える。

記号. (1) 一変数形式級数環 $\mathcal{O}:=\mathbb{C}[[z]]$. ($\mathbb{C}$ 代数とみなす。)
(2) $\mathcal{O}$ 上の derivation[*2] $z^n\partial_z$ $(n\geq 0)$ のなす線形空間 $\mathrm{Der}(\mathcal{O}):=\mathbb{C}[[z]]\partial_z$. これは Lie 代数をなす。
(3) $\mathcal{O}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})=\{z\mapsto a(z)=\sum_{n\geq 1}a_n z^n\in\mathcal{O}\mid a_1\neq 0\}$.
(4) $\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$ の Lie 代数[*3] $\mathrm{Der}_0(\mathcal{O}):=\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{O}))=z\mathbb{C}[[z]]\partial_z$.

従って $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ の V への作用が定まっている。$\mathrm{Der}_0(\mathcal{O})\subset\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ だから、$\mathrm{Der}_0(\mathcal{O})$ も V に作用している。

補題 5.1.1. *V が $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き CVA なら、$\mathrm{Der}_0(\mathcal{O})$ の V への作用は指数関数倍して $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ の作用に延長できる。*

証明. 任意の $a(z)=\sum a_n z^n\in\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ についてある $v_i\in\mathbb{C}$ $(i\geq 0)$ が存在して

$$a(z)=\exp(\textstyle\sum_{i>0}v_i z^{i+1}\partial_z)v_0^{z\partial_z}\cdot z$$

と書ける。従って $a(z)$ の作用を $\exp(-\sum_{i>0}v_i L_i^V)v_0^{-L_0^V}$ で定義できる。 □

以下**曲線**といったら非特異完備複素曲線のこととする。

記号. X を曲線とする。
(1) 点 $x\in X$ での完備局所環を $\mathcal{O}_x$ と書く。形式的座標を一つとって z と書くと $\mathcal{O}_x\simeq\mathcal{O}=\mathbb{C}[[z]]$ となる。
(2) $D_x:=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_x$,　$D_x^{\times}:=\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_x))\simeq\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((z))$.
(3) $\mathcal{A}ut_x$ で D_x の座標のなす集合を書く。$\mathcal{A}ut_x$ には座標変換により $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ が (右から) 作用する。この作用は単純推移的である。

定義. X を曲線、V を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き CVA とする。
(1) 点 $x\in X$ に対し

$$\mathcal{V}_x:=\mathcal{A}ut_x\times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})}V.$$

(2) $\mathcal{A}ut_X:=X\times\mathcal{A}ut_x$. 射影 $\mathcal{A}ut_x\twoheadrightarrow X$ により $\mathcal{A}ut_x$ は X 上の $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$-torsor[*4]である。

[*1] 2016/12/12 版, ver. 1.0
[*2] 可換 $\mathbb{C}$ 代数 R 上の derivation とは $\mathbb{C}$ 線形自己準同型 $D:R\to R$ であって $D(ab)=D(a)b+aD(b)$ をみたすもののこと。
[*3] 本当は $\mathcal{O}$ を完備位相環とみなし、$\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ は連続な自己同型のなす群と思うと群スキームの構造をもつので、その Lie 代数として定義するのが正確な主張です。
[*4] ファイバーに群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ が単純推移的に作用することを torsor であるといいます。群が有限次元 Lie 群 G の時は主 G 束 (principal G-bundle) と呼ぶのが普通です。

(3) V の各斉次部分 V_n が有限次元だとする。この時 V に付随した X 上の**頂点代数束** $\mathcal{V}_X$ を次で定義する。

$$\mathcal{V}_X := \mathcal{A}ut_X \times_{\mathrm{Aut}(\mathcal{O})} V.$$

参考書

E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, second edition, AMS 2004 の Chapter 6.

以上です。