2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 05 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。
期限は**次回 12 月 12 日 (月) の講義まで**です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。今日は有限次元 Lie 代数とその有限次元既約表現に関するものです。

前回 11/28 の問題 1 では $\mathfrak{sl}_n$ を特定の生成元と関係式で表示した。それを一般化して、まず

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,j} \le 0 \ (i \ne j), \quad a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0$$

を満たす整数行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{l}$ が与えられているとする。$3l$ 個の生成元

$$e_i, \quad h_i, \quad f_i \quad (i = 1, \ldots, l)$$

と定義関係式

$$\begin{aligned} &[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i \qquad (i, j = 1, \ldots, l), \\ &(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0, \quad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{i,j}+1}(f_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, l, \ i \ne j). \end{aligned}$$

を考える。ここで前回同様 $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタであり、ad は次で与えられる。

$$(\operatorname{ad} x)(y) := [x, y], \quad (\operatorname{ad} x)^{n+1}(y) := [x, (\operatorname{ad} x)^n(y)].$$

このデータで定まる Lie 代数を A に付随する **Kac-Moody Lie 代数**と呼びを $\mathfrak{g}(A)$ と書く。A を **Cartan 行列**[*2]、e_i, h_i, f_i を **Chevalley 生成元**と呼ぶ。

レポート問題 1 ($\star\star\star$ 古典型有限次元 Lie 代数)**.** 以下の 4 種類の行列を考える。

$$A_{l\,(\ge 1)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{l\,(\ge 2)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_{l\,(\ge 2)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_{l\,(\ge 4)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}.$$

但し数字が書いていないところの成分は 0 とする。$\mathfrak{g}(A_l)$ が $\mathfrak{sl}_{l+1}$ と同型であることは前回の問題 1 で確認した。以下の Lie 代数の同型を示せ。

$$\mathfrak{g}(B_l) \simeq \mathfrak{so}_{2l+1}, \quad \mathfrak{g}(C_l) \simeq \mathfrak{sp}_{2l}, \quad \mathfrak{g}(D_l) \simeq \mathfrak{so}_{2l}.$$

これらは**古典型の有限次元単純 Lie 代数**と呼ばれている。また l をこれら Lie 代数の**ランク**と呼ぶ。

[*1] 2016/12/05 版, ver. 1.0

[*2] 有限次元単純 Lie 代数に対応するものだけを Cartan 行列と呼び、ここに挙げたものを「一般 Cartan 行列」とか「Kac-Moody Cartan 行列」と呼んで区別することもあります。

レポート問題 2 ($\star\star$ 有限次元単純 Lie 代数の有限次元既約表現). 前問で列挙した古典型の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を考える。$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{C}^l$ に対し、

$$e_i v_\lambda = 0, \quad h_i v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$$

を満たす元 v_λ で生成される $\mathfrak{g}$ 表現 $M(\lambda)$ を最高ウェイト λ の **Verma 表現**と呼ぶ。$M(\lambda)$ は次の基底を持つ。

$$\{f_{j_1} \cdots f_{j_m} v_\lambda \mid m \geq 0, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq l\}.$$

(1) この基底の元への $h_i \in \mathfrak{g}$ 作用が次のようになることを確認せよ。

$$h_i \cdot f_{j_1} \cdots f_{j_m} v_\lambda = \left(\lambda_i - \textstyle\sum_{p=1}^m a_{i,j_p}\right) f_{j_1} \cdots f_{j_m} v_\lambda.$$

(2) $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ だとする。この時 $M(\lambda)$ の元 $s_i := f_i^{\lambda_i+1} v_\lambda$ が特異ベクトルであること、即ち次の等式を示せ。

$$e_j s_i = 0 \quad (j = 1, \ldots, l).$$

(3) $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l$ の時に $M(\lambda)$ の商表現 $L(\lambda)$ を以下で定める。

$$L(\lambda) := M(\lambda)/\left(\textstyle\sum_{i=1}^l \mathfrak{g} \cdot s_i\right) = M(\lambda)/\left(\textstyle\sum_{i=1}^l \mathfrak{g} \cdot f_i^{\lambda_i+1} v_\lambda\right)$$

この時 $L(\lambda)$ が有限次元既約表現であることを示せ。実は有限次元単純 Lie 代数[*3]の有限次元既約表現はこの形のものに限られる。例 4.5.2(4) の L_λ はこの $L(\lambda)$ に他ならない。

通常問題

レポート問題 3 ($\star\star$ 菅原構成). 定理 4.4.2 を証明せよ。即ち、$V_k(\mathfrak{g})$ の元

$$\omega_{\mathfrak{g},k} := \frac{1}{2(k+h^\vee)} \textstyle\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{a,-1} J^a_{-1} v_k.$$

が中心電荷 $c(k) := k \dim \mathfrak{g}/(k + h^\vee)$ の Virasoro 元であることを示せ。

レポート問題 4 ($\star\star\star$ 局所性). 定理 4.5.1 を示せ。(Frenkel と Ben-dvi のテキストの §1.2.6 及び §3.2.1 を参照)。

レポート問題 5 ($\star\star\star$ 頂点代数加群). 例 4.5.2(2)–(4) が各頂点代数の加群になっていることを確認せよ。

レポート問題 6 ($\star\star\star\star\star$ 有理頂点代数、C_2 有限性). §4.6 に述べてある概念や定理について、必要なら引用してある原論文を読んで、内容を解説せよ (証明を書いても良いし、非自明な例を作って主張を確認しても良い)。

以上です。

[*3] 問題 1 に挙げたものと例外型と呼ばれる E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型の代数のことです。もちろん、本当は「単純な Lie 代数」という概念があって、その分類定理の帰結としてここで挙げたもの達で尽くされる、というのが正しい言い方です。