2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　12 月 05 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

4　頂点代数

4.4　アフィン頂点代数

$\mathfrak{g}$ を有限次元半単純 Lie 代数とする。

定義. $\mathfrak{g}$ の**カレント Lie 代数** $\widehat{\mathfrak{g}}$ を、線形空間

$$\widehat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

に Lie 括弧を以下のように与えて定義する。

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] := [x,y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0}(x,y)K, \quad [K, x \otimes t^n] = 0, \quad [K,K] = 0.$$

ここで $\mathfrak{g}$ 上の**不変内積**を

$$(\cdot,\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x,y) := (x,y)_{\mathrm{Killing}}/2h^\vee$$

と書いた。右辺の $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Killing}}$ は **Killing 形式**である。それは

$$(x,y)_{\mathrm{Killing}} := \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$$

で定義される $\mathfrak{g}$ 上の双線形形式 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Killing}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ で、非退化かつ不変[*2]である。$h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数[*3] である。

$\{J^a \mid a = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とする。$J^a_n := J^a \otimes t^n$ とすると以下の集合は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の基底を与える。

$$\{K\} \cup \{J^a_n \mid a = 1,\dots,\dim\mathfrak{g},\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

定義. $k \in \mathbb{C}$ とする。$\widehat{\mathfrak{g}}$ の**レベル k の真空表現**を次のような誘導表現として定義する。

$$V_k(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ind}^{\widehat{\mathfrak{g}}}_{\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K} \mathbb{C}v_k.$$

但し $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ は v_k に自明に作用し、K は k 倍で v_k に作用している。

$V_k(\mathfrak{g})$ は以下を線形基底に持つ。

$$\{J^{a_1}_{n_1} \cdots J^{a_m}_{n_m} v_k \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_1 \leq \cdots \leq n_m < 0,\ a_i < a_{i+1} \text{ if } n_i = n_{i+1}\}.$$

定理 4.4.1. $V_k(\mathfrak{g})$ は以下のような $\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数の構造を持つ。

- $|0\rangle := v_k$,
- $Tv_k = 0$, $[T, J^a_n] = -nJ^a_{n-1}$,
- $J^a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1}$ として Y は次で与える。

$$Y(J^{a_1}_{n_1} \cdots J^{a_m}_{n_m} v_k) = \frac{1}{(-n_1-1)!} \cdots \frac{1}{(-n_m-1)!} : \partial_z^{-n_1-1} J^{a_1}(z) \cdots \partial_z^{-n_m-1} J^{a_m}(z) :$$

- $\deg(J^{a_1}_{n_1} \cdots J^{a_m}_{n_m} v_k) := -\sum_{i=1}^m n_i$

[*1] 2016/12/05 版, ver. 1.0

[*2] $(\mathrm{ad}(x)(y), z)_{\mathrm{Killing}} = (y, \mathrm{ad}(x)(z))_{\mathrm{Killing}}$ が任意の $x,y,z \in \mathfrak{g}$ で成立。

[*3] 単純 Lie 代数に対しては以下のように与えられる自然数です。

$\mathfrak{g}$	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_9	G_2
	$\mathfrak{sl}_{n+1}$	$\mathfrak{so}_{2n+1}$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{so}_{2n}$					
$h^\vee$	$n+1$	$2n-1$	$n+1$	$2n-2$	12	18	30	9	4

この定理で定まる頂点代数 $V_k(\mathfrak{g})$ をレベル k の**アフィン頂点代数**と呼ぶ。

$\{J_a\}$ を $\mathfrak{g}$ 上の不変内積 (x, y) に関する $\{J^a\} \subset \mathfrak{g}$ の双対基底とする。

定理 4.4.2. $k \neq -h^\vee$ ならば $V_k(\mathfrak{g})$ は以下のような中心電荷 $c(k)$ の Virasoro 元[*4]$\omega_{\mathfrak{g},k}$ を持つ。特に $V_k(\mathfrak{g})$ は conformal vertex algebra の構造を持つ。

$$c(k) := \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee}, \qquad \omega_{\mathfrak{g},k} := \frac{1}{2(k + h^\vee)} \textstyle\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{a,-1} J^a_{-1} v_k.$$

$\omega_{\mathfrak{g},k}$ が Virasoro 元であることは双対 Coxeter 数の性質 (もしくは定義)

$$\sum_{c,d=1}^{\dim \mathfrak{g}} f^{a,d}_c f^c_{d,b} = 2\delta^a_b h^\vee$$

から従う。ここで $a, b, c, d = 1, 2, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ に対し $f^{a,b}_c \in \mathbb{C}$ は基底 $\{J^a\}$ に関する $\mathfrak{g}$ の構造定数 $[J^a, J^b] = \sum_{c=1}^{\dim \mathfrak{g}} f^{a,b}_c J^c$ である。また $f^c_{a,b} \in \mathbb{C}$ は双対基底 $\{J_a\}$ に関する構造定数 $[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^{\dim \mathfrak{g}} f^c_{a,b} J_c$ である。そして δ^a_b は Kronecker のデルタ ($a = b$ なら 1, そうでないなら 0) である。詳しくはレポート問題 3 とする。

注意. $\omega_{\mathfrak{g},k}$ のことを**菅原ベクトル**と呼ぶこともある。$\omega_{\mathfrak{g},k}$ から Virasoro 代数を構成することを**菅原構成**と呼ぶ。

4.5　頂点代数加群

頂点代数にも加群の概念が導入できる。それを述べる前に頂点代数の公理にある局所性について補足しておく。

定理 4.5.1. (1) 線形空間 V 上の 2 つの場 $A(z), B(w)$ が局所的であることと次の条件は同値：
任意の $v \in V$ と $\varphi \in V^*$ について

$$\langle \varphi, A(z)B(w)v \rangle, \quad \langle \varphi, B(w)A(z)v \rangle,$$

はある元

$$f_{v,\varphi} \in \mathbb{C}[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$$

の $\mathbb{C}((z))((w))$ 及び $\mathbb{C}((w))((z))$ における展開であり、更に $f_{v,\varphi}$ の $(z - w)$ に関する極の位数は v, φ に関して一様に抑えられる。

(2) 頂点代数 $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ の任意の元 $A, B, C \in V$ について、3 つの式

$$\begin{gathered} Y(A, z)Y(B, w)C \in V((z))((w)), \\ Y(B, w)Y(A, z)C \in V((w))((z)), \\ Y(Y(A, z-w)B, w)C \in V((w))((z-w)) \end{gathered}$$

はある $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元の各空間における展開である。

証明はレポート問題 4 とする (Frenkel と Ben-dvi のテキストの §1.2.6 及び §3.2.1 を参照)。

定義. $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ を頂点代数とする。V **上の加群**あるいは単に V **加群**とは、線形空間 M と線形写像 $Y_M : V \to (\mathrm{End}\, M)[[z^{\pm 1}]]$ の組 (M, Y_M) であり以下の性質を満たすもののことである。

- $Y_M(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_M$
- 任意の $A, B \in V$ と $m \in M$ に対し 3 つの式

$$\begin{gathered} Y_M(A, z)Y_M(B, w)m \in M((z))((w)), \\ Y_M(B, w)Y_M(A, z)m \in M((w))((z)), \\ Y_M(Y(A, z-w)B, w)m \in M((w))((z-w)) \end{gathered}$$

　はある $M[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元の各空間での展開である。

[*4] 前回は conformal vector と呼びました。

V 加群 M の元 A に対し $Y_M(A,z)$ の展開を以下のように書くことにする。

$$Y_M(A,z) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} A^M_{(n)} z^{-n-1}. \tag{4.5.1}$$

例 4.5.2. (1) 頂点代数 V はそれ自身の上の加群である。
(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について、Heisenberg 代数 $\mathcal{H}'$ の Fock 表現 π_λ は頂点代数 π_0 上の加群である。
(3) Virasoro 代数の Verma 表現 $M(c,h)$ は Virasoro 頂点代数 $V(c)$ 上の加群である。その既約商であるミニマル表現 $L_{r,s}$ も $V(c_{p,q})$ 加群である。
(4) $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Weyl 表現 $\widehat{V}^k_\lambda$ は $V_k(\mathfrak{g})$ 加群である。ここで $\widehat{V}^k_\lambda$ は次のような誘導表現である。

$$\widehat{V}^k_\lambda := \mathrm{Ind}^{\widehat{\mathfrak{g}}}_{\mathfrak{g}\oplus t\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K} L_\lambda.$$

但し L_λ は最高ウェイト λ の有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 表現。また $t\mathfrak{g}[t]$ は 0 で、K は k 倍で作用させている。$\widehat{V}^k_\lambda$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の **Weyl 表現**と呼ばれる。特に真空表現 $V_k(\mathfrak{g})$ は最高ウェイト 0 の Weyl 表現である: $V_k(\mathfrak{g}) = \widehat{V}^k_0$.

(2)–(4) の確認はレポート問題 5 とする。

注意. $V_k(\mathfrak{g})$ 加群はレベル k の smooth な $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現と同値な概念である。ここで $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現 M が smooth であるとは、任意の $v \in M$ に対しある $N \in \mathbb{Z}$ があって $n \geq N$ なら全ての a について $J^a_n \cdot v = 0$ となるもののことである。実際、$V_k(\mathfrak{g})$ 加群 M が与えられれば $Y_M(A_{-1}v_k, z)$ $(A \in \mathfrak{g})$ の展開係数が M に smooth な $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表現の構造を与える。

4.6 有理的頂点代数、C_2 有限性

定義. (1) $\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数 V 上の加群 M が $\mathbb{Z}$ **次数付き**であるとは、M が次数付き線形空間でかつ各 $A \in V_m$ に対し $\deg A^M_{(n)} = -m+n-1$ となることをいう (ここで展開 (4.5.1) を用いた)。
(2) V 加群 M が $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ **次数付き**であるとは、$\mathbb{Z}$ 次数付き V 加群であり更に M の次数付けが $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるもののことである。

Lie 代数の表現には単純性 (非自明な部分加群を持たないこと) や完全可約性 (単純加群の直和と同型であること) の概念があった。頂点代数の場合にも単純加群、完全可約加群が定義できる。

定義. conformal vertex algebra V は任意の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き V 加群が完全可約なとき**有理的頂点代数**と呼ばれる。

この定義は物理で「有理共形場理論」と呼ばれているもの (例えば江口・菅原「共形場理論」の第 6 章) とは違うので注意。しかし次の定理が Dong, H. Li, Mason[*5] により証明されている。

定理 4.6.1. 有理的頂点代数 V について

(1) V の単純な $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き加群は同型を除いて有限個しかない。
(2) 単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き加群 $M = \oplus_{n\geq 0} M_n$ の各斉次部分 V_n は有限次元。
(3) ω_V を V の Virasoro 元とする。単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き V 加群 $M = (M, Y_M)$ について、

$$Y_M(\omega_V, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^M_n z^{-n-2}$$

と展開した時の係数 L^M_0 は M に半単純に作用し、次数構造 $M = \oplus_{\alpha\in A} M^\alpha$ を定める。但し $A \subset \mathbb{C}$ であり、M^α 上では L^M_0 は α 倍で作用する。
(4) 前項の記号のもと、ある複素数 α_0 があって $A = \alpha_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

この定理の記号と同じものを使って、V 加群の指標を次のように定める。

[*5] C. Dong, H. Li and G. Mason, *Twisted representations of vertex operator algebras*, Math. Ann., **310** (1998) 571–600.

定義. V を有理的頂点代数、M を単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き V 加群とする。$M = \oplus_{\alpha in A}$ を定理 4.6.1(3) の L_0^M 固有分解とする。M **の指標** $\operatorname{ch} M$ を次式で定義する。

$$\operatorname{ch} M := \operatorname{tr}_M q^{L_0^M - c/24} = \textstyle\sum_{\alpha \in A} (\dim M_\alpha) q^{\alpha - c/24}.$$

第 3 章で Virasoro 代数のミニマル表現 $L_{r,s}$ の (Lie 代数の表現としての) 指標 χ を計算した。上の定義から、χ は Virasoro 頂点代数 $V(c_{p,q})$ 上の加群としての指標 $\operatorname{ch} L_{r,s}$ と $q^{-c_{p,q}/24}$ を除いて一致している。

実はこの $q^{-c_{p,q}/24}$ という項は指標を $q = e^{2\pi i\tau}$ の関数としてモジュラー形式であるように調整している。

そしてより一般に、有理的頂点代数に C_2 有限性という条件を課すと、任意の単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き加群の指標がモジュラー性を持つようになる。

定義. 頂点代数 V に対し線形空間としての V の部分空間 $C_2(V)$ を次で定義する。

$$C_2(V) := \operatorname{span}\{A_{(-2)}B \mid A, B \in V\}.$$

但し $A \in V$ に対し $Y(A,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$ と展開した。

定義. 有理的頂点代数 V が C_2 **有限性**[*6]を満たすとは、以下の条件が成立することを言う。

- $\dim V/C_2(V) < \infty$
- $V = \operatorname{span}\{L_{n_1} \cdots L_{n_k} A \mid n_i < 0,\ A \in N(V)\}$. 但し $N(V) := \{A \in V \mid L_n A = 0\ \forall n > 0\}$.

次の結果が C_2 有限性と指標のモジュラー性に関する Y. Zhu の定理[*7] である。

定理. V を C_2 有限性を満たす有理的頂点代数とする。$\{M_1, \ldots, M_n\}$ を単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き V 加群の同型類の集合とする (定理 4.6.1(1) より有限集合である)。この時線形空間

$$\operatorname{span}\{\operatorname{ch} M_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の上半平面 $\mathbb{H}_+ := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$ への作用のもとで不変である。但し $q = \exp(2\pi i\tau)$ で指標の q と $\tau \in \mathbb{H}_+$ を読み替えている。

最後にアフィン頂点代数に関して例[*8]を紹介する。$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $V_k(\mathfrak{g})$ はカレント Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現としては可約である。$L_k(\mathfrak{g})$ を $V_k(\mathfrak{g})$ の既約商とする。

補題. $V_k(\mathfrak{g})$ の頂点代数の構造から $L_k(\mathfrak{g})$ に頂点代数の構造が自然に定まる。

定理 4.6.2. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $L_k(\mathfrak{g})$ は C_2 有限性を満たす有理的頂点代数である。

更に $L_k(\mathfrak{g})$ の単純 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き加群は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の可積分表現と自然に同一視できる。

参考書

E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, second edition, AMS 2004 の Chapter 2, 4, 5.

以上です。

[*6] cofiniteness の訳語なので、正確には「余有限性」ですが、このノートでは簡単のため有限性と訳してあります。
[*7] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. AMS **9** (1996), 237–302.
[*8] といっても非自明な主張です