2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　11 月 28 日分のレポート問題*1

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題、または過去のレポート問題のうち解いていないものから **1 題以上**を選んで、解いて提出して下さい。
期限は**次回 12 月 5 日（月）の講義まで**です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。今日は $\mathfrak{sl}_2$ の表現論に関するものです。

レポート問題 1 ($\star\star$ Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$)**.** n を 2 以上の整数とする。複素数成分の n 次正方行列であって trace が 0 のもの全体のなす集合を $\mathfrak{sl}_n$ と書く。

(1) $\mathfrak{sl}_n$ が交換子積 $[X,Y] := XY - YX$ に関して $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数になることを示せ。

(2) $E_{i,j}$ で (i,j) 成分が 1, 他の成分が 0 の n 次正方行列 (行列単位と呼ばれる) を表す。$\mathfrak{sl}_n$ は Lie 代数として

$$e_i := E_{i,i+1}, \quad f_i := E_{i+1,i}, \quad h_i := E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

達で生成されることを示せ。

(3) 上の生成元達が以下の関係式を満たすことを確認せよ。

$$\begin{aligned} &[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i \qquad (i,j = 1, \ldots, n-1), \\ &(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0, \quad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{i,j}+1}(f_j) = 0 \qquad (i,j = 1, \ldots, n-1,\ i \neq j). \end{aligned} \tag{1}$$

但し $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタ。また $a_{i,j}$ は次で与えられる。

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i\pm 1} = -1, \quad a_{i,j} = 0 \ (|j-i| > 1). \tag{2}$$

そして ad は次で与えられる。

$$(\operatorname{ad} x)(y) := [x, y], \quad (\operatorname{ad} x)^{n+1}(y) := [x, (\operatorname{ad} x)^n(y)].$$

(4) A 型の Dynkin 図形とは何か (必要なら調べて) 説明せよ。上記の $a_{i,j}$ との関係にも言及すること。

レポート問題 2 ($\star\star$ $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現)**.** この問題では $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ を考える。問題 1(2) の生成元を添え字を省略して e, f, h と書くすることにする。

(1) $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$ が $\mathfrak{sl}_2$ の三角分解を与えることを確認せよ。また $\mathfrak{sl}_2$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の PBW 基底を (1 つ) 挙げよ。

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $M(\lambda)$ で $\mathfrak{sl}_2$ の Verma 加群を表す。即ち

$$e v_\lambda = 0, \quad h v_\lambda = \lambda v_\lambda$$

を満たすベクトル (最高ウェイト元) $v_\lambda \in M(\lambda)$ があり、そして f を m 回作用させて得られるベクトルを $f^m v_\lambda$ と書けば線形空間としては $M(\lambda) = \oplus_{m \geq 0} \mathbb{C} f^m v_\lambda$ と書ける。h の $f^m v_\lambda$ への作用を計算せよ。

(3) $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合 $M(\lambda)$ の元 $s_\lambda := f^{\lambda+1} v_\lambda$ が特異ベクトルであること、即ち $e s_\lambda = 0$ であることを示せ。

(4) $M(\lambda)$ は $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ なら既約であることを示せ。

(5) $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合に $L(\lambda) := M(\lambda)/U(\mathfrak{sl}_2)s_\lambda$ と定める。すると線形空間としては $L(\lambda) = \oplus_{n=0}^{\lambda} \mathbb{C} f^n v_\lambda$ と書けること、また $\mathfrak{sl}_2$ 表現として既約であることを示せ。(即ち $L(\lambda)$ は $M(\lambda)$ の既約商である。)

(6) $n = 0, \ldots, \lambda$ に対し $w_n := f^n v_\lambda \in L(\lambda)$ と略記する。(5) より $\{w_0, \ldots, w_\lambda\}$ は $L(\lambda)$ の基底である。この基底に関する e, h, f の作用が以下のようになることを確認せよ ($n < 0$ または $n > \lambda$ なら $w_n := 0$ とする)。

$$e w_n = n(\lambda - n + 1) w_{n-1}, \quad h w_n = (\lambda - 2n) w_n, \quad f w_n = w_{n+1}.$$

---

*1 2016/11/26 版, ver. 1.0

通常問題

レポート問題 3 ($\star$ Heisenberg 頂点代数)**.** Heisenberg 頂点代数 π の任意の元 A について $Y(A,z)\left|0\right\rangle = A+O(z)$ が成立することを確かめよ。

レポート問題 4 ($\star\star$ Heisenberg 頂点代数の conformal vector)**.** $\omega_\lambda := \left(a_{-1}^2/2+\lambda a_{-2}\right)\left|0\right\rangle \in \pi_0$ が中心電荷 $c_\lambda := 1-12\lambda^2$ の conformal vector であること、即ち

$$Y(\omega_\lambda, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{L}_n z^{-n-2}$$

と展開したときに $\{\widetilde{L}_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ が Virasoro 代数の定義関係式

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c_\lambda(m^3-m)\delta_{m,n}/12$$

を満たすことを確認せよ。

レポート問題 5 ($\star\star\star$ Clifford 頂点代数)**.** $\bigwedge$ が conformal vertex superalgebra の構造を持つこと (定理 4.3.2) を証明せよ。

レポート問題 6 ($\star\star$ lattice vertex algebra)**.** $V_\mathbb{Z} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ の parity ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付け) は以下のように与えることができる。

$$p(v) := n^2 \mod 2 \quad (v\in\pi_n).$$

このことを以下の手順で確認せよ。

(1) 頂点作用素 $V_n(z) = Y(\left|n\right\rangle, z)$ に現れるシフト作用素 $S_n : \pi_m \to \pi_{n+m}$ に関して、局所性の条件から

$$S_m S_n = (-1)^{p(|m\rangle)p(|n\rangle)+mn} S_n S_m$$

となることを導け。

(2) それが上記の parity と整合的であることを確認せよ。

以上です。