2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　11 月 28 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

4 頂点代数

これまで線形空間 V 上の**場**の概念を繰り返し使ってきた。定義を思い出すと、$A(z) \in (\operatorname{End} V)[[z^{\pm 1}]]$ であって任意の $v \in V$ に対して $A(z)v \in V((z))$ となるものであった。以下 V 上の場のなす線形空間を $\mathcal{F}ield(V)$ と書く。

4.1 定義

定義 4.1.1. 頂点代数[*2]とは

- 線形空間 V (状態[*3]空間と呼ばれる)
- 元 $|0\rangle \in V$ (真空ベクトルと呼ばれる)
- 線形写像 $T \in \operatorname{End} V$ (translation operator と呼ばれる)
- 線形写像 $Y(-,z) : V \to \mathcal{F}ield(V)$ (state-field correspondence [*4]と呼ばれる)

からなる四つ組 $(V, |0\rangle, T, Y)$ であって以下の条件を満たすもののことである。

- $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V$ 及び任意の $A \in V$ に対して $Y(A,z)|0\rangle = A + O(z) \in V[[z]]$.
- 任意の $A \in V$ に対して $[T, Y(A,z)] = \partial_z Y(A,z)$. また $T(|0\rangle) = 0$.
- 全ての場 $Y(A,z)$ $(A \in V)$ は互いに局所的。

Heisenberg 代数 $\mathcal{H}' = \langle a_n \ (n \in \mathbb{Z})\rangle$ の Fock 表現 π_λ ($\lambda \in \mathbb{C}$ は最高ウェイト) を思い出す。PBW 基底は

$$\{a_{n_1} \cdots a_{n_k} |\lambda\rangle \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, n_1 \leq \cdots \leq n_k < 0\}$$

で与えられた。ここで $|\lambda\rangle$ は最高ウェイト元。また $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ は π_λ 上の場であった。

定理 4.1.2. 最高ウェイト 0 の Fock 表現 π_0 は頂点代数の構造 $(\pi_0, |0\rangle, T, Y)$ を持つ。但し

- 真空ベクトルは最高ウェイト元 $|0\rangle \in \pi_0$.
- T は $T(|0\rangle) := 0$ 及び $[T, a_n] := -n a_{n-1}$ から一意的に定まる。
- π_0 の PBW 基底に対し Y を以下で定める。

$$Y(a_{-n_1} \cdots a_{-n_k}|0\rangle, z) := \frac{1}{(n_1-1)!} \cdots \frac{1}{(n_k-1)!} : \partial_z^{n_1-1} a(z) \cdots \partial_z^{n_k-1} a(z) :$$

証明. ここでは定義の条件の一部を確認する（残りはレポート問題 3)。T は明示的には

$$T(a_{-n_1} \cdots a_{-n_k}|0\rangle) = \textstyle\sum_{j=1}^k n_k a_{-n_1} \cdots a_{-n_j-1} \cdots a_{-n_k}|0\rangle$$

となることが直ぐにわかる。特に $T \in \operatorname{End} V$. Y の像が場になっていること及び局所性は正規積 $: :$ のところで扱った (§1.3 参照)。$Y(a_{-n}|0\rangle, z)|0\rangle$ を考えると

$$Y(a_{-n}|0\rangle, z)|0\rangle = ((n-1)!)^{-1}\, \partial_z^{n-1} \textstyle\sum_k a_{-k} z^{k-1}|0\rangle = \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} a_{-k} z^{k-n}|0\rangle = a_{-n}|0\rangle + O(z)$$

となる。$Y(a_{n_1} \cdots a_{n_k}|0\rangle, z)$ で $k > 1$ の場合は省略。最後に $[T, Y(A,z)] = \partial_z Y(A,z)$ について、$A = a_{-n}|0\rangle$ の場合は $[T, a_n] = -n a_{n-1}$ から直ちに分かる。他の場合は帰納的に証明できるので省略する (レポート問題 3)。 □

[*1] 2016/11/28 版, ver. 1.0.
[*2] vertex algebra の訳語です。
[*3] 英語では state
[*4] vertex operator とも呼ばれます。

定義. 頂点代数 $(\pi_0, |0\rangle, T, Y)$ を **Heisenberg 頂点代数**と呼ぶ。

次に Virasoro 代数の表現 V_c[*5]を思い出す。これは

$$L_n |0\rangle = 0 \ (n \geq -1), \quad C |0\rangle = c |0\rangle$$

なる最高ウェイト元 $|0\rangle$ を持つ最高ウェイト表現であった。PBW 基底として次のものが取れた。

$$\{L_{n_1} \cdots L_{n_k} |0\rangle \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, n_1 \leq \cdots \leq n_k \leq -2\}$$

また $T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ は V_c 上の場であった。

定理 4.1.3. V_c は頂点代数の構造 $(V_c, |0\rangle, T, Y)$ を持つ。但し

- 真空ベクトルは最高ウェイト元 $|0\rangle \in V_c$.
- transplation operator は $T := L_{-1}$ で定義する。
- Y はまず $L_{-2}|0\rangle$ に対して

$$Y(L_{-2}|0\rangle, z) := T(z)$$

　とし、一般には

$$Y(L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}|0\rangle, z) := \frac{1}{(n_1-2)!} \cdots \frac{1}{(n_k-2)!} :\partial_z^{n_1-2}T(z) \cdots \partial_z^{n_k-2}T(z): .$$

ここで :: は $A(z), B(w) \in \mathcal{F}ield(V_c)$ に対して

$$:A(z)B(w): := A(z)_+ B(w) + B(w)A(z)_-$$

と定義される。但し $A(z) = \sum_k A_k z^k$ に対し $A(z)+ := \sum_{k\geq 0} A_k z^k$, $A(z)_- := \sum_{k<0} A_k z^k$.

証明. $T(|0\rangle) = 0$ は明らか。また $[T, Y(A,z)] = \partial_z Y(A,z)$ も定義から簡単に確認できる。$Y(A,z)$ 達の局所性は $T(z)$ 同士の局所性から出る。$Y(A,z)|0\rangle$ についてはまず

$$Y(L_{-2}|0\rangle, z)|0\rangle = T(z)|0\rangle = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} L_k z^{-2}|0\rangle = \sum_{k\leq -2} L_k z^{-2}|0\rangle = L_{-2}|0\rangle + O(z).$$

同様に $Y(L_{-n}|0\rangle, z)|0\rangle$ についても同様。一般の $Y(L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}|0\rangle, z)$ は k に関する帰納法で示せる。 □

定義. 頂点代数 $(V_c, |0\rangle, T, Y)$ を **Virasoro 頂点代数**と呼ぶ。

定義 4.1.4. 頂点代数 $(V, |0\rangle, T, Y)$ は次の条件を満たすとき $\mathbb{Z}$ **次数付き頂点代数**と呼ばれる。

- 線形空間 V は $\mathbb{Z}$ 次数付き線形空間
- $|0\rangle$ の次数は 0.
- T は次数 1 の線形写像。
- $A \in V$ が次数 m なら、$Y(A,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$ と展開すると $A_{(n)}$ は次数 $-n-1+m$[*6]の線形写像。

例. Heisenberg 頂点代数 $(\pi_0, |0\rangle, T, Y)$ と Virasoro 頂点代数 $(V_c, |0\rangle, T, Y)$ は共に $\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数。実際 $\mathbb{Z}$ 次数をそれぞれ以下のように定めればよい。

$$\deg(a_{-n_1} \cdots a_{-n-k}|0\rangle) := \textstyle\sum_{i=1}^k n_i, \qquad \deg(L_{-n_1} \cdots L_{-n-k}|0\rangle) := \sum_{i=1}^k n_i$$

注意.　(1) 以降誤解がない限り、頂点代数 $(V, |0\rangle, T, Y)$ のことを単に V と書くことにする。

(2) $\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数 V の次数構造を以下のように書くことにする。

$$V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \quad V_n := \{\text{ 次数 } n \text{ の斉次元 }\}.$$

[*5] §3 では $V(c, 0)$ と書きましたが、これ以降記号を変えることにしました。
[*6] ver. 1.0 で訂正しました。

4.2 conformal vertex algebra

定義 4.2.1. $c \in \mathbb{C}$ とする。$\mathbb{Z}$ 次数付き頂点代数 V は以下の条件を満たすとき**中心電荷 c の conformal vertex algebra**[*7]と呼ばれる。

- $\omega \in V_2$ があって $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^V z^{-n-2}$ と展開したときに $\{L_n^V \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が中心電荷 c の Virasoro 代数の定義関係式を満たす。

このとき ω を V の **conformal vector** と呼ぶ。

注意. ある頂点代数 V が複数の conformal vector を持つことがある。そのため対 $(V, \omega) = (V, |0\rangle, T, Y, \omega)$ を conformal vertex algebra と呼ぶこともある。実際 Heisenberg 頂点代数は以下のように無限個の conformal vector を持つ。

定理 4.2.2. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$c_\lambda := 1 - 12\lambda^2, \qquad \omega_\lambda := \left(a_{-1}^2/2 + \lambda a_{-2}\right)|0\rangle \in \pi_0 \tag{4.2.1}$$

とすると (π_0, ω_λ) は中心電荷 c_λ の conformal vertex algebra である。

証明はレポート問題 4 とする。

4.3 vertex superalgebra

定義. $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き線形空間[*8]とする。

(1) $V_{\bar{0}}$ の元を **even 元**、$V_{\bar{1}}$ の元を **odd 元**と呼ぶ。V の斉次元 v の**パリティ** $p(v)$ を v が even なら $p(v) := 0$, v が odd なら $p(v) := 1$ で定める。

(2) $f \in \operatorname{End} V$ は $f(V_{\bar{i}}) \subset V_{\bar{i}}$ の時 **even**、$f(V_{\bar{i}}) \subset V_{\overline{i+1}}$ の時 **odd** と呼ばれる。

(3) V 上の場 $A(z) = \sum_n A_n z^n$ は全ての n について A_n が even なら **even な場**、全ての n について A_n が odd なら **odd な場**と呼ばれる。V 上の場であって even または odd なものを **superfield**[*9]と呼ぶ。$\mathcal{SF}ield(V) := \{V$ 上の超場$\}$ と書く。$A(z) \in \mathcal{SF}ield(V)$ の**パリティ** $p(A)$ を $A(z)$ が even なら $p(A) := 0$, $A(z)$ が odd なら $p(A) := 1$ で定める。

(4) $A(z), B(w) \in \mathcal{SF}ield(V)$ が**局所的**であるとはある正の整数 N が存在して $\operatorname{End}(V)[[z^{\pm1}, w^{\pm1}]]$ において

$$(z-w)^N [Y(A,z), Y(B,w)] = 0$$

が成立することをいう。但し $[\,,\,]$ は $p(A)p(B) = \bar{0}$ なら通常の交換子 $[\,,\,]$, $p(A)p(B) = \bar{1}$ なら反交換子 $[\,,\,]_+$ のこと。

定義 4.3.1. vertex superalgebra[*10]とは

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き線形空間 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$.
- $|0\rangle \in V_{\bar{0}}$.
- 次数 $\bar{0}$ の線形写像 $T \in \operatorname{End} V$.
- 線形写像 $Y(-, z) : V \to \mathcal{SF}ield(V)$

からなる四つ組 $(V, |0\rangle, T, Y)$ であって以下の条件を満たすもののことである。

- $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V$ 及び任意の $A \in V$ に対して $Y(A, z)|0\rangle = A + O(z) \in V[[z]]$.
- 任意の $A \in V$ に対して $[T, Y(A,z)] = \partial_z Y(A, z)$. また $T(|0\rangle) = 0$.

[*7] 決まった訳語は無いのですが、共形 (的) 頂点代数と呼ぶのでしょうか。
[*8] 英語では super vector space あるいは単に superspace.
[*9] 超場という訳語がしばしば使われます。
[*10] 頂点超代数とでも訳すのでしょうが、あまり一般的ではないので英語を使います。

- 全ての superfield $Y(A,z)$ $(A \in V)$ は互いに局所的。

定義. $\mathbb{Z}$ 次数付き vertex superalgebra, conformal vertex superalgebra も §4.1 と同様に定義される。

注意. $\mathbb{Z}$ 次数付き vertex superalgebra には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数 (parity) と $\mathbb{Z}$ 次数 (degree) の 2 種類の次数付けがある。

Clifford 代数 $\langle \psi_n, \psi_n^* \rangle$ とその Fock 表現 $\bigwedge$ を思い出す。$\bigwedge$ の最高ウェイト元 $|0\rangle$ は次を満たすものであった。

$$\psi_n |0\rangle = 0 \ (n \geq 0), \quad \psi_n^* |0\rangle = 0 \ (n > 0).$$

定理 4.3.2. Clifford 代数の Fock 表現 $\bigwedge$ は頂点超代数の構造 $(\bigwedge, |0\rangle, T, Y)$ をもつ。但し

- $\bigwedge$ の (0 でない) 元の parity は全て odd とする。つまり $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}} = 0 \oplus \bigwedge$.
- T は $[T, \psi_n] = -n\psi_{n-1}$, $[T, \psi_n^*] = -(n-1)\psi_{n-1}$ 及び $T(|0\rangle) = 0$ から一意に定まる。
- Y は以下で与える。

$$\begin{aligned}
&Y(\psi_{-1}|0\rangle, z) := \psi(z) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n z^{-n-1}, \quad Y(\psi_0^* |0\rangle, z) := \psi^*(z) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n^* z^{-n}, \\
&Y(\psi_{-n_1} \cdots \psi_{-n_j} \psi_{-m_1}^* \cdots \psi_{-m_k}^* |0\rangle, z) \\
&\qquad := \frac{1}{(n_1-1)!} \cdots \frac{1}{(n_j-1)!} \frac{1}{m_1!} \cdots \frac{1}{m_k!} : \partial_z^{n_1-1}\psi(z) \cdots \partial_z^{n_j-1}\psi(z) \partial_z^{m_1-}\psi^*(z) \cdots \partial_z^{m_k}\psi^*(z) :
\end{aligned}$$

更に以下の次数付けにより $\mathbb{Z}$ 次数付き vertex superalgebra になる。

- $\deg(\psi_{-n_1} \cdots \psi_{-n_j} \psi_{-m_1}^* \cdots \psi_{-m_k}^* |0\rangle) := \sum_{i=1}^j n_j + \sum_{i=1}^k m_i$.

また $\mu \in \mathbb{C}$ に対し次で定まる $(\bigwedge, \widetilde{\omega}_\mu)$ は中心電荷 $-2(6\mu^2 - 6\mu + 1)$ の conformal vertex superalgebra である。

- $\widetilde{\omega}_\mu := \mu\psi_{-1}^*\psi_{-1} - \psi_{-2}\psi_0^*$.

証明は §4.1 と同様。詳細はレポート問題 5 とする。vertex superalgebra $\bigwedge$ は **Clifford 頂点代数**またはフェルミオン頂点代数と呼ばれる。

定理 4.3.3. Heisenberg 代数の Fock 表現の直和 $V_{\mathbb{Z}} := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n$ は頂点代数 π_0 を部分代数[*11]として含むような $\mathbb{Z}$ 次数付き vertex superalgebra の構造 $(V_{\mathbb{Z}}, |0\rangle, T, Y)$ を持つ。
但し $|0\rangle \in \pi_0 \subset V_{\mathbb{Z}}$. また T は頂点代数 π_0 と同様に決める。更に Y を一部書くと

$$Y(|n\rangle, z) := V_n(z) = S_n z^{na_0} \exp(-n\textstyle\sum_{k<0} a_k z^{-k}/k) \exp(-n\textstyle\sum_{k>0} a_k z^{-k}/k).$$

特に (4.2.1) の $\omega_\lambda \in\subset V_{\mathbb{Z}}$ なので $(V_{\mathbb{Z}}, \omega_\lambda)$ は中心電荷 c_λ の conformal vertex superalgebra である。

この主張の証明は少し難しい。詳しい証明は参考書の Chapter 5 を参照せよ。またレポート問題 6 も参照のこと。vertex superalgebra $V_{\mathbb{Z}}$ は **lattice vertex algebra**[*12]と呼ばれる。

§2 のボソン・フェルミオン対応は以下のように書き直せる。

定理 4.3.4. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ は $1 - 12\lambda^2 = -2(6\mu^2 - 6\mu + 1)$ を満たすとする。この時次のような conformal vertex superalgebra の同型がある。

$$(\bigwedge, \widetilde{\omega}_\mu) \simeq (V_{\mathbb{Z}}, \omega_\lambda).$$

参考書

E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, second edition, AMS 2004 の Chapter 1, 2, 5.

以上です。

[*11] 定義を与えませんが、頂点代数の定義から自然に推測されるものです。
[*12] 格子頂点代数と言わなくもないですが、英語の方が良く使われると思います。