

2016年度後期 数理解物理学 II/数理解物理学概論 II 11月21日分のレポート問題*1

理学部 A-441号室 柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題のうち1題以上を解いて提出して下さい。期限は次回11月28日(月)の講義までです。

各問題の★は難易度を示しています。★1つを5点前後として採点する予定です。

講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。これまで出題した問題で解答してくれた人がいなかった問題の中から、特に大事なものを再掲しました。

レポート問題 1 (★ Heisenberg Fock 表現の既約性 (10/24 の問題 4)).

Heisenberg 代数 \mathcal{H}' の Fock 表現 π_λ の既約性 (命題 2.1.3) の証明を完成させよ。

レポート問題 2 (★ Virasoro 代数の Shapovalov 形式 (10/31 の問題 1(3) 訂正版)).

Virasoro 代数 $\text{Vir} = \langle L_n (n \in \mathbb{Z}), C \rangle$ の Verma 表現と双対 Verma 表現の Shapovalov 形式を考える。任意の分割 λ と μ について $\langle c, h | L_\lambda L_{-\mu} | c, h \rangle = \langle c, h | L_\mu L_{-\lambda} | c, h \rangle$ となることを示せ。

レポート問題 3 (★★ Kac 行列式 (10/31 の問題 4)).

(1) Kac 行列 K_4 を計算し行列式が以下になることを確認せよ。

$$\det K_4 = 384h^3(16h^2 - (10 - 2c)h + c)(3h^2 - (7 - c)h + 2 + c)(16h^2 - (82 - 10c)h + 66 + 15c)(8h - 1 - c).$$

(2) $1 \leq n \leq 4$ について Kac 行列公式 (定理 3.4.5) を確認せよ。

通常問題

レポート問題 4 (★★★ 局所的な場と形式的デルタ関数). $f(z, w) \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ がある正の整数 N について $(z - w)^N f(z, w) = 0$ を満たすものとする。この時

$$f(z, w) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i(w) \partial_w^i \delta(z, w)$$

となる $g_1(w), \dots, g_{N-1}(w) \in \mathbb{C}[[w^{\pm 1}]]$ が一意に存在することを示せ。

尚、命題 3.7.2(ストレステンソル $T(z)$ の局所性) の前半の主張はこの命題から従う。

レポート問題 5 (★★★ primary 場の 3 点相関関数). 命題 3.9.2、即ち以下の主張をを証明せよ。

$\Phi_j(z)$ を共形次元 h_j の primary 場とし

$$\Psi(z_1, \dots, z_m) := \langle \Phi_1(z_1) \cdots \Phi_m(z_m) \rangle$$

と定めると、

$$\Psi(z_1) \propto \delta_{h_1, 0}$$

$$\Psi(z_1, z_2) \propto \delta_{h_1, 0} z_{21}^{-2h_1}$$

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) \propto z_{21}^{h_3 - h_1 - h_2} z_{31}^{h_2 - h_1 - h_3} z_{32}^{h_1 - h_2 - h_3}.$$

但し $z_{ij} := z_i - z_j$.

以上です。

*1 2016/11/21 版, ver. 1.0.