2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　11 月 21 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　ミニマル模型（続き）

3.6　BPZ 表現

Kac 行列式の零点には $\pm\sqrt{(1-c)(25-c)}$ という項が現れていた。これを上手く処理するために $c = 1-6(\beta-1)^2/\beta = 13-6(\beta+\beta^{-1})$ と変数変換すると $\sqrt{(1-c)(25-c)} = 6(\beta-1/\beta)$ となる。Kac 行列式公式の帰結で、次のことが分かる。

定理 3.6.1. $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 及び $rs>0$ なる $r,s\in\mathbb{Z}$ に対して

$$c = 13-6(\beta+\beta^{-1}), \quad h = h_{r,s} = \frac{(r\beta-s)^2-(\beta-1)^2}{4\beta}$$

の時、$M(c,h)$ は次数 $n=rs$ の特異ベクトルを 1 次元分だけもつ。

前回の議論を思い出すと、特異ベクトルが存在することと表現が可約であることが同値であった。

定義 3.6.2. $rs>0$ なる $r,s\in\mathbb{Z}$ 及び $1\le r\le p-1$, $1\le s\le q-1$ なる $r,s\in\mathbb{Z}$ に対して最高ウェイトが

$$c = c_{p,q} := 1-6\frac{(p-q)^2}{pq}, \quad h = h_{r,s} \equiv h^{p,q}_{r,s} := \frac{(rq-sp)^2-(q-p)^2}{4pq}$$

となる Verma 表現 $M(c_{p,q},h_{r,s})$ を $M_{r,s}$ と書く。またその既約商 $L_{r,s} := L(c_{p,q},h_{r,s})$ を **BPZ 表現**または**ミニマル表現**と呼ぶ。

$h_{r,s}$ の定義式より次式が直ちにわかる。

$$h_{p-r,q-s} = h_{r,s}.$$

$M_{r,s}$ の構造について少し詳しく見てみよう。定理 3.6.1 より次数 rs に特異ベクトル $v_{r,s}$ をもつ。それが生成する部分表現は前回の定理 3.5.2 より最高ウェイト表現で、その最高ウェイトは

$$h_{r,s}+rs = \frac{(rq+sp)^2-(p-q)^2}{4pq} = h_{-r,s}$$

となる。従って Vir 表現の (非自明な) 準同型

$$M_{-r,s} \longrightarrow M_{r,s}, \quad |c_{p,q},h_{-r,s}\rangle \longmapsto v_{r,s}$$

がある。ところで

補題 3.6.3. Verma 表現の間の非自明な準同型は全て単射。

従って上の準同型は単射である。

次に

$$h_{r,s} = h_{-r,-s} = h_{r+p,s+q}$$

なので、同様の議論で単射

$$M_{2p-r,s} = M_{r-p,q-s} \hookrightarrow M_{p-r,q-s} = M_{r,s}$$

が存在する。つまり $M_{r,s}$ には 2 つの Verma 表現 $M_{-r,s}, M_{2p-r,s}$ が埋め込まれている。この議論を続けると、

[*1] 2016/11/21 更新, ver. 1.0.

定理 3.6.4. Verma 表現の埋め込みは次のように図示できる。

$$
\begin{tikzcd}
 & -r \arrow[dl] & -2p+r \arrow[l] \arrow[ddl] & -2p-r \arrow[l] \arrow[ddl] & -4p+r \arrow[l] \arrow[ddl] & -4p-r\cdots \arrow[l] \arrow[ddl] \\
r & & & & & \\
 & 2p-r \arrow[ul] & 2p+r \arrow[l] \arrow[uul] & 4p-r \arrow[l] \arrow[uul] & 4p+r \arrow[l] \arrow[uul] & 6p-r\cdots \arrow[l] \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$

但し $k \to l$ で $M_{k,s} \hookrightarrow M_{l,s}$ を表している。

これから既約表現 $L_{r,s}$ の指標が計算できる。結果を述べる前に指標の定義を思い出す。ここでは簡単のため形式的指標の定義で済ますことにする。M を例**??**の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のウェイト表現とし $M = \oplus_\lambda M_\lambda$ をそのウェイト分解とする。各 λ に対して文字 $e(\lambda)$ を導入する。M の指標とは形式的和

$$\operatorname{ch} M \ := \ \sum_{\lambda} (\dim M_\lambda) e(\lambda)$$

のことであった。

Vir 表現の指標は、定義通りには L_0 のウェイトと C のウェイトの両方を用いて表されるが、中心電荷 c に固定される状況では C のウェイトは省略されることが多い。そして $e(h)$ の代わりに q^h と書く。

例えば Vir の Verma 表現 $M(c,h)$ の指標は、$M(c,h) = \oplus_{n\geq 0} M(c,h)_n$, $\dim M(c,h)_n = p(n)$ だから

$$\operatorname{ch} M(c,h) = \sum_{n\geq 0} p(n) q^{h+n} = q^h \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1}$$

定理 3.6.5. BPZ 表現 $L_{r,s}$ の指標は

$$\operatorname{ch} L_{r,s} \ := \ \prod_{n\geq 0} (1-q^n)^{-1} \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{h_{2kp+r,s}} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{h_{2kp-r,s}} \right).$$

3.7 ストレステンソル

定義 3.7.1. 以下で与えられる $T(z)$ を**ストレステンソル**と呼ぶ。

$$T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}.$$

命題 3.7.2. $T(z)$ は $M(c,h)$ 上の場でありかつ自分自身と局所的。より詳しく言うと

$$[T(z), T(w)] = \frac{c}{12} \partial_w^3 \delta(z,w) + 2\partial_w \delta(z,w) \cdot T(w) + \delta(z,w) \partial_w T(w)$$

この主張は $M(c,h)$ だけでなく一般の Vir の最高ウェイト表現 V についても成立する。

証明. 場であることの証明は省略。局所性について、

$$
\begin{aligned}
[L_n, T(w)] &= \textstyle\sum_m [L_n, L_m] w^{-m-2} = \sum_m \big((n-m) L_{n+m} + c(n^3-n)\delta_{m+n,0}/12 \big) w^{-m-2} \\
&= w^n \textstyle\sum_k (2n-k) L_k w^{-k-2} + C(n^3-n) w^{n-2}/12
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&[T(z), T(w)] = \sum_n z^{-n-2} \big(w^n \sum_k (2n-k) L_k w^{-k-2} + C(n^3-n) w^{n-2}/12 \big) \\
&= C \sum_n z^{-n-2} (n-1)n(n+1) w^{n+1}/12 + \sum_{n,k} z^{-n-2} (2n-k) w^{n-k-2} L_k \\
&= \frac{C}{12} \sum_n z^{-n-2} \partial_w^3 w^{n+1} + \sum_{n,k} z^{-n-2} 2(n+1) w^{n-k-2} L_k + \sum_{n,k} z^{-n-2} (-k-2) w^{n-k-2} L_k
\end{aligned}
$$

$$= \frac{C}{12}\sum_n z^{-n-2}\partial_w^3 w^{n+1} + 2\sum_n z^{-n-2}(n+1)w^n \sum_k L_k w^{-k-2} + \sum_n z^{-n-2}w^{n+1}\sum_k (-k-2)L_k w^{-k-3}.$$

これから結論を得る。 □

3.8 primary 場

V を Vir の表現であって $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ が V 上の場であるものと仮定する。

定義 3.8.1. $h \in \mathbb{C}$ とする。V 上の場 $\Phi(z)$ は

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n(z\partial_z + h(n+1))\Phi(z)$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つとき共形次元[*2]h の **primary 場**と呼ばれる。

primary 場の条件は以下のように書き換えられる。

$$[T(z), \Phi(w)] = h\partial_w \delta(z,w)\Phi(w) + \delta(z,w)\partial\Phi(w). \tag{3.8.1}$$

命題 3.8.2. 共形次元 h_i の 2 つの primary 場 $\Phi_i(z)$ $(i=1,2)$ が局所的であるなら、$\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって

$$[\Phi_1(w), \Phi_2(w)] = A(w)\partial_w^\gamma \delta(z,w) + B(w)\partial_w^{\gamma-1}\delta(z,w) + \cdots$$

と展開できて、しかも展開の初項の係数 $A(w)$ もまた primary 場でありその共形次元は $\gamma + h_1 + h_2$ である。

証明. 前半の展開できることに関する主張は、より一般的な場に関する事実から従う。ここでは省略する。(レポート問題 4 を参照。)

primary 場の定義から

$$[L_n, \Phi_1(z)\Phi_2(w)] = \left(z^n\left(z\partial_z + h_1(n+1)\right) + w^n\left(w\partial_w + h_2(n+1)\right)\right)\Phi_1(z)\Phi_2(w).$$

これを展開式 $[\Phi_1(w), \Phi_2(w)] = A(w)\partial_w^\gamma\delta(z,w) + \cdots$ に代入して展開の初項を比較すると

$$[L_n, A(w)] = w^n(w\partial_w + (\gamma + h_1 + h_2)(n+1))A(w).$$

□

3.9 primary 場の相関関数

以下 $c \in \mathbb{C}$ を固定する。

$\mathrm{Der}\,\mathcal{O} := \langle L_n \mid n \geq -1\rangle$ を Vir の部分 Lie 代数とする。$\mathrm{Der}\,\mathcal{O} \oplus \mathbb{C}C \subset \mathrm{Vir}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_0$ を線形空間としては $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}\,|0\rangle$, 基底の作用を

$$C\,|0\rangle = c\,|0\rangle\,, \quad L_n\,|0\rangle = 0\ (n \geq -1)$$

で定める。Vir 表現 $V(c,0)$ を次の誘導表現として定義する。

$$V(c,0) \;:=\; \mathrm{Ind}_{\mathrm{Der}\,\mathcal{O}\oplus\mathbb{C}C}^{\mathrm{Vir}}\,\mathbb{C}_0$$

同様に Vir 右表現 $V^*(c,0)$ を定義する。$\mathrm{Der}\,\mathcal{O}^* := \langle L_n \mid n \leq -2\rangle \subset \mathrm{Vir}$ とし、$\mathrm{Der}\,\mathcal{O}^* \oplus \mathbb{C}C$ の 1 次元右表現 $\mathbb{C}_0$ を線形空間として $\mathbb{C}_0^* = \langle 0|\,\mathbb{C}$, 基底の右作用を

$$\langle 0|\,C = c\,\langle 0|\,, \quad \langle 0|\,L_n = 0\ (n \leq -2)$$

で定める。そして Vir 右表現 $V^*(c,0)$ を次で定義する。

$$V^*(c,0) \;:=\; \mathrm{Ind}_{\mathrm{Der}\,\mathcal{O}^*\oplus\mathbb{C}C}^{\mathrm{Vir}}\,\mathbb{C}_0^*$$

[*2] conformal dimension の訳語です。

$M(c,h)$ の時と同様に双線形形式 $\cdot :, V^*(c,0) \times V(c.0) \to \mathbb{C}$ であって

$$\langle 0| \cdot |0\rangle = 1, \quad ux \cdot v = u \cdot xv \ (u \in V^*(c,0), x \in \mathrm{Vir}, V(c,0))$$

を満たすもの (Shapovalov 形式) が一意に定まる。そして $\cdot$ を省略して $\langle 0| L_3 L_{-2} L{-1} |0\rangle$ のように書く。

定義. V 上の場 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_k(z)$ の**相関関数**を次式で定める。

$$\langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_k(z_k)\rangle := \langle 0| \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_k(z_k) |0\rangle .$$

以下共形次元 h_j の primary 場 $\Phi_j(z)$ 達 $(j = 1, 2, \ldots)$ の相関関数 $\Psi(z)$ を考える。

$$\Psi(z_1, \ldots, z_m) := \langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_m(z_m)\rangle .$$

命題 3.9.1. (1) $\Phi_j(z)$ が共形次元 h_j の primary 場なら

$$\langle T(z)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(z_m)\rangle = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{h_j}{(z-w_j)^2} + \frac{1}{z-w_j}\frac{\partial}{\partial w_j}\right]\Psi(w_1, \ldots, w_m)$$

(2)

$$\langle L_n\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(z_m)\rangle = -\sum_{j=2}^{m}\left[(z_j - z_1)^{n+1}\frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1)h_j(z_j - z_1)\right]\Psi(w_1, \ldots, w_m).$$

(3) $n = 0, \pm 1$ について

$$\sum_{j=1}^{m} z_j^n \left[z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1)h_j\right]\Psi(z_1, \ldots, z_m) = 0$$

証明. (1) (3.8.1) から従う。
(2) は (1) を z で展開すれば得られる。
(3) は (2) と $\langle 0| L_n |0\rangle = 0$ より。 □

$\langle L_{-1}, L_0, L_1\rangle \subset \mathrm{Vir}$ が $\mathfrak{sl}_2$ と同型であることを思い出すと、上の (3) から次の命題が従う。

命題 3.9.2. $\Psi(z_1, \ldots, z_k)$ は $k \leq 3$ なら定数倍を除いて一意に定まる。より詳しく、$z_{ij} := z_i - z_j$ として

$$\begin{aligned}
&\Psi(z_1) \propto \delta_{h_1,0}\\
&\Psi(z_1, z_2) \propto \delta_{h_1,0} z_{21}^{-2h_1}\\
&\Psi(z_1, z_2, z_3) \propto z_{21}^{h_3-h_1-h_2} z_{31}^{h_2-h_1-h_3} z_{32}^{h_1-h_2-h_3}.
\end{aligned}$$

証明はレポート問題 5 とする。

参考書

山田泰彦「共形場理論」（培風館）の §§3.2–3.7.
江口徹・菅原祐二「共形場理論」（岩波書店）の §§2.1–2.3.

以上です。