2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　11 月 07 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題のうち **1 題以上**を解いて提出して下さい。期限は**次回 11 月 21 日（月）の講義まで**です。
各問題の $\star$ は難易度を示しています。$\star$1 つを 5 点前後として採点する予定です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。引き続き Lie 代数に関する基本的な概念を、Virasoro 代数周辺に関連する事項を中心に扱います。(分かっている人は、できればこれらの問題は避けてください。)

レポート問題 1 ($\star\star\star$ 有限次元半単純 Lie 代数)**.** ($\mathbb{C}$ 上の) 有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について $\mathfrak{g}$ に付随するルート系、ウェイト格子、三角分解を説明せよ。

レポート問題 2 ($\star$ 最高ウェイト表現)**.** 有限次元半単純 Lie 代数に対して定理 3.5.2 を証明せよ。

レポート問題 3 ($\star$ 指標と短完全系列)**.** Lie 代数の表現の短完全系列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ が与えられているとき $\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(L) + \mathrm{ch}(N)$ となることを示せ。

通常問題

レポート問題 4 ($\star$ Verma 表現の間の準同型)**.** 補題 3.6.3, 即ち "Virasoro 代数の Verma 表現の間の非自明な準同型は全て単射である" を証明せよ。

レポート問題 5 ($\star\star$ BPZ 表現の指標)**.** 定理 3.6.5, 即ち BPZ 表現 $_{r,s}$ の指標が

$$\mathrm{ch}\, L_{r,s} \;=\; \prod_{n\geq 0}(1-q^n)^{-1}\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{h_{2kp+r,s}} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{h_{2kp-r,s}}\right).$$

となることを証明せよ。

レポート問題 6 ($\star$ Euler の五角数定理)**.** BPZ 表現 $L_{r,s} = L(c_{p,q}, h^{p,q}_{r,s})$ で $(p,q) = (2,3)$ かつ $(r,s) = (1,1)$ の場合を考える。
(1) $c = h = 0$ となることを確認し、更に $L_{r,s}$ が自明な表現になることを示せ。
(2) 自明表現の指標が 1 であることと定理 3.6.5(BPZ 表現 $L_{r,s}$ の指標公式) から次の公式 (Euler の五角数定理) を導け。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(3n^2-n)/2}.$$

以上です。

[*1] 2016/11/07 版, ver. 1.0.