2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　11 月 07 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　ミニマル模型（続き）

3.5　Verma 加群に関する補足

前回 Virasoro 代数に対して Verma 表現を導入したが、実はより一般の Lie 代数に対して同様の表現を導入することができる。

Lie 代数のクラスに可換 Lie 代数、冪零 Lie 代数があったことを思い出す。

定義. (1) **三角分解を持つ Lie 代数** $\mathfrak{g}$ とは、線形空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ があって各 $\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^0$ と $\mathfrak{g}^{\geq 0} := \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0$ 及び $\mathfrak{g}^{\leq 0} := \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ が部分 Lie 代数になっており、更に $\mathfrak{g}^{\pm}$ は冪零 Lie 代数、$\mathfrak{g}^0$ は可換 Lie 代数になっているもののことである。
(2) 与えられてた Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して上の条件を満たす線形空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ を $\mathfrak{g}$ の**三角分解**と呼ぶ。

n 次正方行列のなす線形空間 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は交換子 $[X, Y] := XY - YX$ を Lie 括弧とする Lie 代数である。これは $\mathfrak{g}^+$ を狭義上三角行列のなす部分空間、$\mathfrak{g}^0$ を対角行列全体のなす部分空間、$\mathfrak{g}^-$ を狭義下三角行列全体のなす部分空間とする三角分解をもつ。これが「三角」分解という名前の由来である。

例 3.5.1. (1) 一般の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ も三角分解を持つ。このときの可換部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ は Cartan 部分代数と呼ばれる。
(2) Heisenberg 代数 $\mathcal{H}' = \langle a_n \, (n \in \mathbb{Z}), 1 \rangle$ は

$$\mathcal{H}^+ := \langle a_n \, (n > 0) \rangle, \quad \mathcal{H}^0 := \langle a_0, 1 \rangle, \quad \mathcal{H}^- := \langle a_n \, (n < 0) \rangle \tag{3.5.1}$$

とする三角分解を持つ。
(3) Virasoro 代数 $\mathrm{Vir} = \langle L_n \, (n \in \mathbb{Z}), C \rangle$ は

$$\mathrm{Vir}^+ := \langle L_n \, (n > 0) \rangle, \quad \mathrm{Vir}^0 := \langle L_0, C \rangle, \quad \mathrm{Vir}^- := \langle L_n \, (n < 0) \rangle \tag{3.5.2}$$

とする三角分解を持つ。

Verma 加群は三角分解を持つ Lie 代数について定義することができる。それを説明するために、まず可換 Lie 代数の表現の構成から復習する。

$\mathfrak{h}$ を可換 Lie 代数とすると、各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{h}$ の表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を次のように定めることができる。表現空間は $|\lambda\rangle$ を基底とする 1 次元線形空間 $\mathbb{C}\,|\lambda\rangle$ であり、各 $x \in \mathfrak{h}$ の作用を次で与える。

$$x \cdot |\lambda\rangle \;:=\; \lambda(x)\,|\lambda\rangle$$

次に Lie 代数 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ と線形空間として直和分解されていて、$\mathfrak{n}$ は冪零な部分 Lie 代数、$\mathfrak{h}$ は可換な部分 Lie 代数だとする。この時も各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{b}$ の表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を同様に定めることができる。つまり、表現空間は $|\lambda\rangle$ を基底とする 1 次元線形空間 $\mathbb{C}\,|\lambda\rangle$ であり、各 $x \in \mathfrak{b}$ の作用を次で与えればよい。

$$x \cdot |\lambda\rangle \;:=\; \begin{cases} \lambda(x)\,|\lambda\rangle & x \in \mathfrak{h} \\ 0 & x \in \mathfrak{n} \end{cases}.$$

[*1] 2016/11/07 更新, ver. 1.1.

最後に誘導表現を思い出そう。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が部分 Lie 代数 $\mathfrak{b}$ を持ち、$\mathfrak{b}$ の表現 M が与えられているとする。この時 $\mathfrak{g}$ の表現 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$ を ($U(\mathfrak{g})$ 加群として)

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M \;:=\; U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M$$

で定義することができる。これを $\mathfrak{b}$ 表現 M から得られる $\mathfrak{g}$ の**誘導表現**と呼ぶ。

定義. $\mathfrak{g}$ を三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ を持つ Lie 代数とする。また $\lambda \in (\mathfrak{g}^0)^*$ とする。最高ウェイト λ の **Verma 表現** とは、部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\geq 0} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0$ の表現 $\mathbb{C}_\lambda$ から得られる $\mathfrak{g}$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}^{\geq 0}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$ のことである。

例. (1) Heisenberg 代数 $\mathcal{H}' = \langle a_n, 1\rangle$ の三角分解 (3.5.1) を考える。 可換部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^0$ は a_0 と 1 で生成される部分であるが、その双対空間 $(\mathfrak{g}^0)^*$ は 1 次元空間 $\mathbb{C}$ である。各 $\lambda \in (\mathfrak{g}^0) = \mathbb{C}$ について $\mathfrak{g}^{\geq 0} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0$ の表現 $\mathbb{C}_\lambda$ から得られる誘導表現を考えることができるが、定義からそれは最高ウェイト λ の Fock 表現に他ならない。つまり $\mathcal{H}'$ 表現として

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}^{\geq 0}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda \;\simeq\; \pi_\lambda.$$

(2) Vir の三角分解 (3.5.2) について、$\mathrm{Vir}^0 = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}C$ だから $(\mathrm{Vir}^0)^* \simeq \mathbb{C}^2$ である。$(c, h) \in \mathbb{C}^2 \simeq (\mathrm{Vir}^0)^*$ について誘導加群を考えると、それは (前回導入した)Virasoro 代数の Verma 加群に他ならない。即ち Vir 表現として

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Vir}^{\geq 0}}^{\mathrm{Vir}} \mathbb{C}_{(c,h)} \;\simeq\; M(c, h).$$

ここで Verma 加群の基底について復習しよう。まず普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の PBW 基底を思い出す。$\mathfrak{g}$ が三角分解 $\mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ を持てば、PBW 基底の存在定理の帰結として線形同型

$$U(\mathfrak{g}) \;\simeq\; U(\mathfrak{g}^-) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}^0) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}^+) \;\simeq\; U(\mathfrak{g}^-) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}^{\geq 0})$$

が得られる。一方で $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}\,|\lambda\rangle$ だったので、次の線形同型が分かる。

補題. 線形空間として

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}^{\geq 0}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}^{\geq 0})} \mathbb{C}_\lambda \;\simeq\; U(\mathfrak{g}^-)\,|\lambda\rangle\,.$$

従って $U(\mathfrak{g}^-)$ の PBW 基底が Verma 表現の基底を与えることも分かる。

例. (1) Heisenberg 代数 $\mathcal{H}'$ の Fock 表現 π_λ に対しては $\{a_{-\mu}\,|\lambda\rangle \mid \mu \text{ は分割 }\}$ が基底だと分かる。
(2) Vir の Verma 表現 $M(c, h)$ に対しては $\{L_{-\mu}\,|c, h\rangle \mid \mu \text{ は分割 }\}$ が基底だと分かる。

Verma 表現を含む重要な表現のクラスに最高ウェイト表現がある。ウェイトに関する諸概念から復習しよう。

定義. $\mathfrak{g}$ を Lie 代数、$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を可換部分 Lie 代数とする。
(1) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ [*2]に対して

$$M_\lambda := \{v \in M \mid x \cdot v = \lambda(x)v \;\forall x \in \mathfrak{h}\}$$

と定め λ ウェイト空間と呼ぶ。
(2) $\mathfrak{g}$ 表現 M は $\mathfrak{h}$ 半単純、即ち

$$M = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} M_\lambda$$

となるとき ($\mathfrak{h}$ に関する) **ウェイト表現**と呼ばれる。

定義. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ を持つとする。
(1) $\mathfrak{g}$ 表現 M の 0 でない元 v は、$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ があって $v \in M_\lambda$ かつ $\mathfrak{n}^+ \cdot v = 0$ となるとき**ウェイト λ の極大元**[*3]と呼ばれる。
(2) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする。$\mathfrak{g}$ 表現 M が**最高ウェイト λ の最高ウェイト表現**であるとは、極大元 $v \in M_\lambda$ があって $M = U(\mathfrak{g}) \cdot v$ となることを言う。

[*2] ver. 1.1 で訂正しました。
[*3] maximal vector の訳語です。primitive vector と呼ぶこともあります。

例. Verma 表現は $|\lambda\rangle$ をウェイト λ の極大元とする最高ウェイト表現である。

実は例 3.5.1 であげた三角分解を持つ Lie 代数の Verma 表現 M は最高ウェイト表現であるだけでなくウェイト表現にもなる。より詳しく述べるのに Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の正ルート[*4]の集合 $\Phi_+ \subset \mathfrak{h}^*$ が必要になる。$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ は $\lambda - \mu \in \Phi_+$ の時 $\lambda > \mu$ と書く。

定理 3.5.2. 例 3.5.1 であげた三角分解を持つ Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ を考える。M を最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の最高ウェイト表現とする。またウェイト λ の極大元を v と書く。この時
(1) M はウェイト表現である。更にウェイト空間への分解は $M = M_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu<\lambda} M_\mu$ とかける。
(2) M の 0 でない商表現は再び最高ウェイト λ の最高ウェイト表現になる。
(3) M の部分表現は全てウェイト表現である。またウェイト $\mu < \lambda$ の極大元 w で生成される部分表現 $U(\mathfrak{g}) \cdot w$ は真部分表現である。特に M が既約であるならその極大元は v のスカラー倍に限られる。
(4) M は極大部分表現を唯一つ持ち、また既約商表現を唯一つ持つ。特に M は直既約である。
(5) 既約な最高ウェイト λ の最高ウェイト表現は全て同型である。

特に Vir の Verma 表現 $M(c,h)$ の既約商を $L(c,h)$ と書く。(c,h) が Kac 行列式の零点でなければ $M(c,h) = L(c,h)$ である。

注意 3.5.3. また中心電荷 c は固定して議論することが多いので、混乱がない限り、$M(c,h)$ を "最高ウェイト h の Verma 表現" と呼ぶことにする。

3.6 BPZ 表現

Kac 行列式の零点には $\pm\sqrt{(1-c)(25-c)}$ という項が現れていた。これを上手く処理するために $c = 1-6(\beta-1)^2/\beta = 13-6(\beta+\beta^{-1})$ と変数変換すると $\sqrt{(1-c)(25-c)} = 6(\beta - 1/\beta)$ となる。Kac 行列式公式の帰結で、次のことが分かる。

定理 3.6.1. $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び $rs > 0$ なる $r, s \in \mathbb{Z}$ に対して

$$c = 13 - 6(\beta + \beta^{-1}), \quad h = h_{r,s} = \frac{(r\beta - s)^2 - (\beta-1)^2}{4\beta}$$

の時、$M(c,h)$ は次数 $n = rs$ の特異ベクトルを 1 次元分だけもつ。

前回の議論を思い出すと、特異ベクトルが存在することと表現が可約であることが同値であった。

定義 3.6.2. $rs > 0$ なる $r, s \in \mathbb{Z}$ 及び $1 \le r \le p-1$, $1 \le s \le q-1$ なる $r, s \in \mathbb{Z}$ に対して最高ウェイトが

$$c = c_{p,q} := 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \quad h = h_{r,s} \equiv h^{p,q}_{r,s} := \frac{(rq-sp)^2 - (q-p)^2}{4pq}$$

となる Verma 表現 $M(c_{p,q}, h_{r,s})$ を $M_{r,s}$ と書く[*5]。またその既約商 $L_{r,s} := L(c_{p,q}, h_{r,s})$ を **BPZ 表現**[*6]と呼ぶ。

$L_{r,s}$ に "対応する共形場理論"[*7]のことを**ミニマル模型**[*8]と呼ぶ。

[*4] 有限次元半単純 Lie 代数の時は通常のルート系を考えればよいです。Vir については L_0, C の双対元を $\ell, \gamma \in (\mathrm{Vir}^0)^*$ として $\Phi_+ := \mathbb{Z}_{\ge 0}\ell \oplus \mathbb{Z}_{\ge 0}\gamma \setminus \{0\}$ とします。
[*5] 混乱が無さそうな範囲で (p,q) への依存性を省略して書いています。
[*6] 言うまでもなく 2 次元共形場理論の創始者達の頭文字が名前の由来です。該当する論文は
A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333–380
[*7] この講義ではまだ未定義語です。
[*8] 文脈によっては $M_{r,s}$ に対応するものを指すこともあります。

参考書

山田泰彦「共形場理論」(培風館)の §§3.2–3.7.
江口徹・菅原祐二「共形場理論」(岩波書店)の §§2.1–2.3.

以上です。