2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 31 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題のうち **1 題以上**を解いて提出して下さい。期限は**次回 11 月 7 日（月）の講義まで**です。
各問題の $\star$ は難易度を示しています。$\star$1 つを 5 点前後として採点する予定です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方の問題です。引き続き Lie 代数に関する基本的な概念を、Virasoro 代数周辺に関連する事項を中心に扱います。(分かっている人は、できればこれらの問題は避けてください。)

レポート問題 1 ($\star$ Virasoro 代数). (1) Verma 加群の次数 (補題 3.1.5 の証明) について $L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_k}|c,h\rangle \in M(c,h)_n$, $n=\sum_{i=1}^k n_i$ を証明せよ。

(2)
$$\{L_{-\lambda_\ell}\cdots L_{-\lambda_2}L_{-\lambda_1}|c,h\rangle \mid \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell)\vdash n\}$$
も $M(c,h)_n$ の基底であることを示せ。

(3) 任意の分割 λ と μ について $\langle c,h|L_\lambda L_{-\mu}|c,h\rangle = \langle c,h|L_\mu L_{-\lambda}|c,h\rangle$ となる[*2]ことを示せ。

レポート問題 2 ($\star\star\star$ 中心拡大). (1) Lie 代数の中心拡大とは何か説明せよ。

(2) 生成元 l_n ($n\in\mathbb{Z}$) と関係式 $[l_n,l_m]=(n-m)l_{n+m}$ で定められる Lie 代数を D で表す。D の中心拡大は全て Vir と同型になることを証明せよ。

レポート問題 3 ($\star\star$ 一般の Lie 代数の Verma 加群). (1) Lie 代数の三角分解とは何か述べよ。

(2) 三角分解を持つ Lie 代数について Verma 加群を定義せよ。

通常問題

レポート問題 4 ($\star\star$ Kac 行列式). (1) Kac 行列 K_4 を計算し行列式が以下のようになることを確認せよ。

$$\det K_4 = 384h^3(16h^2-(10-2c)h+c)(3h^2-(7-c)h+2+c)(16h^2-(82-10c)h+66+15c)(8h-1-c).$$

(2) $1\le n\le 4$ について Kac 行列公式 (定理 3.4.5) を確認せよ。

レポート問題 5 ($\star\star$ 特異ベクトル). (1) Kac 行列 K_2 が $\det K_2=0$ を満たす時、$M(c,h)$ は 2 次の特異ベクトルを持つ。それらを全て求めよ。

(2) 3 次の特異ベクトルを全て求めよ。

裏に続く。

[*1] 2016/11/07 版, ver. 1.1.
[*2] ver. 1.1 で訂正しました。

レポート問題 6 ($\star\star\star$ Clifford 代数の wedge 積実現[*3]). $e_1, e_2, \ldots$ を基底とする無限次元の線形空間 $V = \oplus_{n\geq 1}\mathbb{C}e_n$ を考える。正の整数 k に対し $\wedge^k V$ を

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k)$$

の形の元の線形結合からなる線形空間とする。$\wedge^0 V := \mathbb{C}$ と定め、これらの直和空間を

$$\wedge^* V := \oplus_{k\geq 0} \wedge^k V = \mathbb{C} \oplus V \oplus \wedge^2 V \oplus \cdots$$

と表す。$\wedge$ を反対称 $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ かつ双線形に拡張することで、双線形写像

$$\wedge : \wedge^* V \times \wedge^* V \longrightarrow \wedge^* V$$

が定まる。

(1) $\wedge^* V$ は $\wedge$ を積とする $\mathbb{C}$ 上の結合代数になることを示せ。この代数を以下単に $\wedge^* V$ で表す。また $\wedge$ を省略して $e_i e_j := e_i \wedge e_j$ 等と略記する。

(2) $\wedge^* V$ 上の作用素 ∂_{e_i} を、基底については

$$\partial_{e_i} 1 := 0, \quad \partial_{e_i} e_k := \delta_{i,j}, \quad \partial_{e_i}(e_j e_k \cdots e_l) := \delta_{i,j} e_k \cdots e_l - e_j \partial_{e_i}(e_k \cdots e_l)$$

と帰納的に定め、あとは線形に拡張して定義する。また作用素 $e_i \wedge (-)$ を単に e_i と書く。このとき

$$[e_i, e_j]_+ = 0, \quad [\partial_{e_i}, \partial_{e_j}]_+ = 0, \quad [\partial_{e_i}, e_j]_+ = \delta_{i,j}$$

となることを示せ。但し作用素 x, y について $[x, y]_+ := x \circ y + y \circ x$.

(3) $n < 1$ のとき $e_n := 0$ と約束する。作用素 a_n を $a_n := \sum_{k=1}^{\infty} e_{k-n} \partial_{e_k}$ と定めると $[a_n, e_m] = e_{m-n}$ が成立することを示せ。

(4) $(t_1, t_2, \ldots)$ 及び z を新たな変数とする。

$$H(t) := \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n, \quad e(z) := \sum_{n=1}^{\infty} e_n z^n, \quad \xi(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n$$

とおき、また $h_n \in \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots]$ を展開

$$\exp(\xi(t, z)) = \sum_{n\geq 0} h_n z^n$$

で定める。この時以下の等式が成立することを示せ。

$$e^{H(t)} e(z) e^{-H(t)} = e^{\xi(t,z)} e(z), \quad e^{H(t)} e_n e^{-H(t)} = e_n + h_1 e_{n-1} + \cdots + h_{n-1} e_1.$$

(5) $p > 0$ とする。

$$\langle p|\, f\, |0\rangle := f \text{ における } e_p \wedge e_{p-1} \wedge \cdots \wedge e_1 \text{ の係数}$$

で線形写像 $\langle m|\bullet|0\rangle : \wedge^* \to \mathbb{C}$ を定める。この時以下の等式が成立することを示せ。

$$\langle p|\, e^{H(t)} e_{n_1} \cdots e_{n_p}\, |0\rangle = \det\big((-1)^{p(p-1)/2} h_{n_i - j}\big)_{1\leq i,j\leq p}.$$

ここで右辺は (i, j) 成分が $(-1)^{p(p-1)/2} h_{n_i - j}$ となる行列の行列式。

以上です。

[*3] 山田泰彦「共形場理論」（培風館）の §1.6 を参考にしました。