2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 31 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　ミニマル模型 1

3.1　Virasoro 代数と Verma 表現

定義 3.1.1. *Virasoro* **代数** Vir とは以下の生成元と関係式で定義される Lie 代数である。

$$\text{生成元：} L_n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad C$$
$$\text{関係式：} [L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}\, C, \quad [L_n, C] = 0.$$

$\deg L_n = -n$ 及び $\deg C = 0$ により Vir は次数付き Lie 代数になる。

注意. (1) $\langle L_{-1}, L_0, L_1 \rangle \subset \mathrm{Vir}$ は $\mathfrak{sl}_2$ と同型。

(2) $l_n := -z^{n+1}\partial_z$ は交換関係

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}$$

を満たす。即ち l_n 達は Virasoro 代数で $C = 0$ としたものになっている。

補題 3.1.2. 以下の集合は $U(\mathrm{Vir})$ の基底をなす（PBW 基底)。

$$\{L_{n_1} L_{n_2} \cdots L_{n_\ell} C^m \mid \ell, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\ell\}$$

定義 3.1.3. $c, h \in \mathbb{C}$ とする。以下の最高ウェイト元 $|c,h\rangle$ で生成される Vir 加群 $M(c,h)$ を **Verma 加群**と呼ぶ。

$$L_n |c,h\rangle = 0 \ (n > 0),\ L_0 |c,h\rangle = h |c,h\rangle,\ C |c,h\rangle = c |c,h\rangle.$$

c を**中心荷電** (central charge)、h を**最高ウェイト**と呼ぶ。

補題 3.1.4. 以下の集合は $M(c,h)$ の基底をなす。

$$\{L_{-\lambda_1} L_{-\lambda_2} \cdots L_{-\lambda_\ell} |c,h\rangle \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0\}$$

補題 3.1.5. $M(c,h)$ は以下の次数付けで次数付き Vir 加群になる。

$$M(c,h) = \bigoplus_{n \geq 0} M(c,h)_n, \quad M(c,h)_n := \{v \in M(c,h) \mid L_0 v = (h+n)v\}.$$

$M(c,h)_n$ の元を**次数** n **の斉次元**と呼ぶ。

証明. $L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_k} |c,h\rangle \in M(c,h)_n$, $n = \sum_{i=1}^k n_i$ から従う。 □

例 3.1.6. $M(c,h)_n$ の元を書き出してみると

n	次元	（基底）
0	1	$\|c,h\rangle$
1	1	$L_{-1} \|c,h\rangle$
2	2	$L_{-2} \|c,h\rangle,\ L_{-1}L_{-1} \|c,h\rangle$
3	3	$L_{-3} \|c,h\rangle,\ L_{-2}L_{-1} \|c,h\rangle$
4	5	$L_{-4} \|c,h\rangle,\ L_{-3}L_{-1} \|c,h\rangle,\ L_{-2}^2 \|c,h\rangle,\ L_{-2}L_{-1}^2 \|c,h\rangle,\ L_{-1}^4 \|c,h\rangle$

定義 3.1.7. n を正の整数とする。

[*1] 2016/11/07 版, ver. 1.1.

(1) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1$ かつ $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$ を満たす整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ を n **の分割**という。この時 $\lambda \vdash n$ と書く。

(2) 0 の分割とは空の数列 $\emptyset$ のことと約束する。

(3) $p(n) := \#\{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ を n **の分割数**という。

(4)（非負整数の）分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し、$L_{-\lambda} := L_{-\lambda_1} L_{-\lambda_2} \cdots L_{-\lambda_\ell}$。

系 3.1.8. (1) $\{L_{-\lambda} \left|c,h\right\rangle \mid \lambda \vdash n\}$ は $M(c,h)_n$ の基底である。　(2) $\dim M(c,h)_n = p(n)$.

3.2 双対 Verma 加群と Shapovalov 型式

定義 3.2.1. $c, h \in \mathbb{C}$ とする。Vir の双対 Verma 加群 $M^*(c,h)$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned} &M^*(c,h) := \left\langle c,h\right| \mathbb{C}\left\langle L_1, L_2, \ldots \right\rangle \\ &\left\langle c,h\right| L_n = 0 \ (n<0),\ \left\langle c,h\right| L_0 = h \left\langle c,h\right|,\ \left\langle c,h\right| C = c \left\langle c,h\right|. \end{aligned}$$

注意. 双対 Verma 加群は右加群として定義する。

定義 3.2.2. (1) $v \in M^*(c,h)$ は $vL_0 = (h+n)v$ となる時**次数** n **の斉次元である**と呼ばれる。更にこの時 $\deg(v) = n$ と書く。

(2) 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し、$L_\lambda := L_{\lambda_\ell} \cdots L_{\lambda_2} L_{\lambda_1}$。

命題 3.2.3. (1) $M^*(c,h)$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として次の直和分解を持つ。

$$M^*(c,h) = \bigoplus_{n \geq 0} M^*(c,h)_n, \quad M^*(c,h)_n := \{v \in M^*(c,h) \mid \text{次数 } n \text{ の斉次元}\}.$$

(2) $\{\left\langle c,h\right| L_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は $M^*(c,h)_n$ の基底。

(3) $\dim M^*(c,h)_n = p(n)$.

定義 3.2.4. *Shapovalov* **型式** $\cdot : M^*(c,h) \times M(c,h) \to \mathbb{C}$ を以下の条件を満たす双線形型式とする。

$$\left\langle c,h\right| \cdot \left|c,h\right\rangle = 1, \quad uL_n \cdot v = u \cdot L_n v \ (\forall n \in \mathbb{Z})$$

補題 3.2.5. Shapovalov 型式は一意に存在する。

例 3.2.6.

$$\begin{aligned} &\left\langle c,h\right| \cdot L_{-1} \left|c,h\right\rangle = \left\langle c,h\right| L_{-1} \cdot \left|c,h\right\rangle = 0 \cdot \left|c,h\right\rangle = 0 \\ &\left\langle c,h\right| L_1 \cdot L_{-1} \left|c,h\right\rangle = \left\langle c,h\right| \cdot L_1 L_{-1} \left|c,h\right\rangle = \left\langle c,h\right| \cdot (2L_0 + L_{-1}L_1) \left|c,h\right\rangle = \left\langle c,h\right| \cdot 2h \left|c,h\right\rangle = 2h. \end{aligned}$$

補題 3.2.7. $v \in M(c,h)_n$ と $u \in M^*(c,h)_m$ について、$n \neq m$ なら $u \cdot v = 0$。

証明. 条件より $L_0 v = (h+n)v$ 及び $uL_0 = (h+m)u$ なので

$$(h+m)u \cdot v = uL_0 \cdot v = u \cdot L_0 v = (h+n)u \cdot v.$$

よって $m \neq n$ なら $u \cdot v = 0$。 □

注意. 2 つめの性質から以下のような略記法を用いる。

$$\left\langle c,h\right| L_\lambda L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle := \left\langle c,h\right| L_\lambda \cdot L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle.$$

3.3 特異ベクトル

定義 3.3.1. $\chi \in M(c,h)_k \setminus \{0\}$ は $L_n \chi = 0$（$\forall n \geq 1$）となる時**次数** k **の特異ベクトル**と呼ばれる。

例. (1) 最高ウェイトベクトル $|c,h\rangle$ は次数 0 の特異ベクトル。

(2) $\chi = L_{-1}|c,0\rangle$ を考える。$L_1\chi = 2L_0|c,0\rangle = 0$ と $L_nL_{-1}|c,h\rangle = 0$ $(n>1)$ より χ も特異ベクトル。

補題 3.3.2. 次数が 1 以上の特異ベクトル $\chi \in M(c,h)$ と任意の $u \in M^*(c,h)$ について $u \cdot \chi = 0$。

証明. $\langle c,h| \cdot \chi$ は補題 3.2.7 と次数に関する仮定より 0. $M^*(c,h)$ の他の元については、$\cdot$ の線形性より $\langle c,h| L_\lambda$ (λ は長さ 1 以上の分割) という形の元を考えれば十分だが、その場合特異ベクトルの定義から

$$\langle c,h| L_\lambda \cdot \chi = \langle c,h| L_{\lambda_\ell}\cdots L_{\lambda_2}\cdot L_{\lambda_1}\chi = \langle c,h| L_{\lambda_\ell}\cdots L_{\lambda_2}\cdot 0 = 0.$$

□

命題 3.3.3. 次数 $k \geq 1$ の特異ベクトルが存在 $\iff$ $M(c,h)$ は可約。

証明. $V_\chi := \mathrm{Vir}\cdot\chi \subset M(c,h)$ は Vir 部分表現。V_χ の斉次元は全て次数 1 以上になるので $V_\chi \subsetneq M(c,h)$ は真部分表現となる。従って $M(c,h)$ は可約。

逆に $M(c,h)$ が可約なら、真部分加群 N の斉次元で次数最小のものを一つ取り v とおく。$v \neq |c,h\rangle$ が背理法ですぐに分かる。$\mathrm{Vir}\cdot v \subset N$ だから $L_kv \in N$ $(k>0)$。すると次数の取り方から $L_kv = 0$. よって v は次数 1 以上の特異ベクトル。 □

3.4 Kac 行列式

定義 3.4.1. n を正の整数とする。$p(n)$ 次正方行列 K_n を $K_n := (\langle c,h| L_\lambda L_{-\mu}|c,h\rangle)_{\lambda,\mu\vdash n}$ で定める。

$n = 1,2,3$ で書き下すと

$$\begin{aligned}
K_1 &= (2h)\\
K_2 &= \begin{pmatrix} \langle c,h| L_2L_{-2}|c,h\rangle & \langle c,h| L_2L_{-1}^2|c,h\rangle \\ \langle c,h| L_1^2L_{-2}|c,h\rangle & \langle c,h| L_1^2L_{-1}^2|c,h\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h+c/2 & 6h \\ 6h & 4h(1+2h) \end{pmatrix}\\
K_3 &= \begin{pmatrix} \langle c,h| L_3L_{-3}|c,h\rangle & \langle c,h| L_3L_{-2}L_{-1}|c,h\rangle & \langle c,h| L_3L_{-1}^3|c,h\rangle \\ \langle c,h| L_1L_2L_{-3}|c,h\rangle & \langle c,h| L_1L_2L_{-2}L_{-1}|c,h\rangle & \langle c,h| L_1L_2L_{-1}^3|c,h\rangle \\ \langle c,h| L_1^3L_{-3}|c,h\rangle & \langle c,h| L_1^3L_{-2}L_{-1}|c,h\rangle & \langle c,h| L_1^3L_{-1}^3|c,h\rangle \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 6h+2c & 10h & 24h \\ 10h & 8h^2+8h+ch & 12h(1+3h) \\ 24h & 12h(1+3h) & 24h(1+h)(1+2h) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

命題 3.4.2. 正の整数 n について、$\det K_n = 0$ と次数 n の特異ベクトルが存在することは同値。

証明. $\det K_n = 0$ $\iff$ ある $\chi \in M(c,h)_n$ があって任意の L_λ $(\lambda \vdash n)$ について $\langle c,h| L_\lambda\cdot\chi = 0$ $\iff$ $L_k\chi = 0$ $(1 \leq k \leq n)$. □

例えば

$$\begin{aligned}
\det K_1 &= 2h\\
\det K_2 &= 2h(16h^2-(10-2c)h+c)\\
\det K_3 &= 48h^2(16h^2-(10-2c)h+c)(3h^2-(7-c)h+2+c)
\end{aligned}$$

定理 3.4.3.

$$\det K_n \propto \prod_{r,s>0\ 1\leq rs\leq n}(h-h_{r,s})^{p(n-rs)} \quad \in \mathbb{C}[c,h],$$
$$h_{r,s} := \frac{1}{48}[(13-c)(r^2+s^2)-24rs-2(1-c)+\sqrt{(1-c)(25-c)}(r^2-s^2)]$$

Kac が予想し[*2] Feigin-Fuchs が Fock 表現（自由場表示）を用いて証明した。[*3] [*4]

系 3.4.4. $M(c,h)$ は $c \in \mathbb{R}_{>1}$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$ なら既約。

証明. $n > 0$ に対し $\det K_n(c,h) > 0$ を示せば十分。

$$\varphi_{r,r} := h - h_{r,r}, \quad \varphi_{r,s} := (h - h_{r,s})(h - h_{s,r}) \quad (r \neq s)$$

とすると $\varphi_{r,r} = h + (r^2-1)(c-1)/24 > 0$. また

$$\varphi_{r,s} = (h-(r-s)^2/4)^2 + h(r^2+s^2-2)(c-1)/24 + (r^2-1)(s^2-1)(c-1)^2/576 + (c-1)(r-s)^2(rs+1)/48$$

と $1 \leq rs \leq n$ から $\varphi_{r,s} > 0$. よって $\det K_n(c,h) > 0$. □

参考書

山田泰彦「共形場理論」（培風館）の §§3.1–3.7.
江口徹・菅原祐二「共形場理論」（岩波書店）の §§2.1–2.3.

以上です。

[*2] V. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lect. Notes in Phys. **94**, Springer-Verlag (1979), 441–445.

[*3] B. L. Feigin, D. B. Fuks, *Invariant skew-symmeric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **16** (1982), 114–126.

[*4] B. L. Feigin, D. B. Fuks, *Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **17** (1984), 230–245.