2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 24 日分のレポート問題[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

以下の問題のうち **1 題以上**を解いて提出して下さい。期限は**次回 10 月 31 日（月）の講義まで**です。
各問題の ⋆ は難易度を示しています。⋆1 つを 5 点前後として採点する予定です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

代数的な概念に慣れていない人のための問題

代数的な概念に不慣れな方もいるようなので、そのためのレポート問題を用意しました。今回は Lie 代数に関する基本的な概念を問題にしました。(分かっている人は、できればこれらの問題は避けてください。)

レポート問題 1 (⋆⋆ Lie 代数、普遍包絡代数、表現). Lie 代数について以下の問に答えよ。

(1) Lie 代数の定義を述べよ。
(2) Lie 代数の普遍包絡代数の定義を述べよ。
(3) Lie 代数の表現の定義を述べよ。
(4) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と、普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ 上の加群が同値な概念であることを説明せよ。
(5) Lie 代数の既約な表現とは何か、定義を述べよ。

レポート問題 2 (⋆⋆ Heisenberg 代数). (1) 講義で扱っている Heisenberg 代数 $\mathcal{H}'$ が $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数であることを確認せよ。

(2) 普遍包絡代数 $U(\mathcal{H}')$ の PBW 基底を求めよ。
(3) $\mathcal{H}'$ の Fock 表現 π_α が $\mathcal{H}'$ の表現であることを示せ。
(4) 誘導表現とは何か述べよ。
(5) Fock 表現 π_α が誘導表現であることを説明せよ。

レポート問題 3 (⋆ Baker-Campbell-Hausdorff の定理). 命題 2.1.8 の証明で「Baker-Campbell-Hausdorff の公式」を使った。それがどういうものか説明せよ。可能なら証明も与えよ。

通常問題

レポート問題 4 (⋆ Fock 空間の既約性). Heisenberg Fock 空間 π_λ の既約性 (命題 2.1.3) の証明を完成させよ。

レポート問題 5 (⋆⋆ 既約 $\mathcal{H}'$ 表現の分類). 既約 $\mathcal{H}'$ 表現の分類定理 (事実 2.1.4)、即ち次の命題を証明せよ。「$\mathbb{Z}$ 次数付きでかつ次数が下に有界な**任意の既約 $\mathcal{H}'$ 表現**は、ある $\lambda \in \mathbb{C}$ があって π_λ と同型になる。」

レポート問題 6 (⋆ 最高ウェイト表現の準同型). 次の命題 (補題 2.1.5) を証明せよ。「条件 $S_\lambda(|\mu\rangle) = |\mu+\lambda\rangle$ を満たす $\mathcal{H}''$ 準同型[*2] $S_\lambda : \pi_\mu \to \pi_{\mu+\lambda}$ が一意に存在する。」

レポート問題 7 (⋆ 頂点作用素). 次の命題 (補題 2.1.7) を示せ。「任意の $v \in \pi_\nu$ に対し $V_\lambda(z)v \in z^{\lambda\nu}\pi_{\lambda+\nu}((z))$.」

レポート問題 8 (⋆⋆ Lie superalgebra の普遍包絡代数と PBW 基底). Lie superalgebra の定義、その普遍包絡代数の定義、及び PBW 基底の存在定理の主張を述べよ。PBW 基底については証明も与えよ。

レポート問題 9 (⋆⋆ fermionic Fock 表現の次数構造と Jacobi 三重積公式). (1) Clifford 代数 $\mathcal{C}l$ の (fermionic) Fock 表現 $\bigwedge$ には、

$$\psi_{n_1}\cdots\psi_{n_k}\psi^*_{m_1}\cdots\psi^*_{m_l}|0\rangle \quad (k,l \geq 0,\ n_1<n_2<\cdots<n_k<0,\ m_1<m_2<\cdots<m_l\leq 0).$$

[*1] 2016/10/24 版, ver. 1.1.
[*2] ver 1.1 で訂正しました。

に対し $\deg := -\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{l} m_j$ で定まる $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数があった。これとは別に (パリティを定義した時に使った) $\mathrm{charge} := l - k$ による $\mathbb{Z}$ 次数がある。これを**電荷**による次数づけと呼ぶ。$\mathrm{charge} = c$ かつ $\deg = d$ となる元からなる $\bigwedge$ の部分空間を $\bigwedge_{d,c}$ と書く。この時次の等式を示せ。

$$\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{c\in\mathbb{Z}} q^d u^c \dim(\textstyle\bigwedge_{d,c}) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1}u)(1+q^n u^{-1}).$$

(2) ボソン・フェルミオン同型 $\bigwedge \simeq V_{\mathbb{Z}}$ を $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 次数付き線型同型に拡張し、それと (1) から次の Jacobi 三重積公式を導け。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-1}u)(1+q^n u^{-1}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m(m-1)/2}u^m.$$

レポート問題 10 ($\star\star\star$ Ferimionic Fock 表現の実現). (1) $(\ldots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots)$ を (両側) 無限個の変数とする。その半無限外積ベクトル (**semi-infinite wedge** と英語で呼ぶことが多い)

$$v := e_{n_1}\wedge e_{n_2}\wedge e_{n_3}\wedge\cdots \tag{$\heartsuit$}$$

であって、$n \gg 0$ について e_n を含まず $n \ll 0$ なる e_n は全て含むものを考える。外積なので各 e_n は高々一度しか現れない。例えば

$$e_3\wedge e_2\wedge e_{-1}\wedge e_{-4}\wedge e_{-5}\wedge e_{-6}\wedge\cdots$$

が該当する。それらを基底とする線形空間を F と書く。この基底への ψ_m と ψ_m^* の作用を

$$\psi_m^* v = e_{-m}\wedge v, \quad \psi_m^* v = \frac{\partial}{\partial e_m} v$$

で定める。このとき F は $\mathcal{C}l$ の表現であり、fermionic Fock 表現 $\bigwedge$ と同値になることを示せ。外積なので $e_m\wedge e_n = -e_n\wedge e_m$ と符号が現れることに注意せよ。また $\bigwedge$ の電荷を F の言葉で述べよ (それを以下 F での電荷と呼ぶ)。

(2) F 上の作用素 $\widehat{a}_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ を

$$\widehat{a}_n := \sum_{k\geq 1} e_{k-n}\frac{\partial}{\partial e_k}$$

と定める。以下の等式が成立することを確認せよ。但し $[f,g] := f\circ g - g\circ f$ は (通常の) 交換子である。

$$[\widehat{a}_n, e_m\wedge] = e_{m-n}\wedge, \quad [\widehat{a}_n, \widehat{a}_m] = n\delta_{n+m,0}$$

(3) 問 (1) の F の基底の元と、以下で定義する**マヤ図形**が一対一対応することを示せ。マヤ図形の電荷と F の元の電荷が対応することも確認せよ。

マヤ図形とは白丸 ◦ と黒丸 • の両側無限列で、整数でラベルがついているとすると、十分負 (図で左側) には • のみが、十分正 (図で右側) には ◦ のみが位置しているものである。下図では $(3, 2, -1, -4, -5, -6, \ldots)$ に • が置かれている状況を示していて、| で負と非負の境界を表している。

$$\cdots\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\,|\,\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\circ\cdots$$

境界より右にある • を粒子、境界より左にある ◦ を反粒子とよぶことにして、**マヤ図形の電荷**を (粒子数) − (反粒子数) と定義する。例えば上のマヤ図形の電荷 0、次のマヤ図形の電荷 1 である。

$$\cdots\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\cdots$$

(4) 電荷 c の semi-infinite wedge ($\heartsuit$) に対応するマヤ図形に対し

$$\lambda_i := n_i - (c+1-i)$$

と定義する。この対応でマヤ図形は分割と整数の組 (λ, c) と 1 対 1 に対応することを示せ。ここで分割とは正の整数の単調減少な有限数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, $\lambda_i > 0$ のことである。

以上です。