2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 24 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1　自由場 1

1.3　場の局所性

定義 1.3.6. 線形空間 V 上の場 $A(z)$ と $B(z)$ が**局所的** (local) であるとは、ある非負整数 N があって $(\operatorname{End} V)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ において次の等式が成り立つことをいう。

$$(z-w)^N [A(z), B(w)] = 0.$$

$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$ を定義関係式とする Heisenberg 代数を $\mathcal{H}'$、その最高ウェイト 0 の Fock 表現を π_0 と書いた。$a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ は π_0 上の場であった。

命題 1.3.7. π_0 上の場 $\partial^n a(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は互いに局所的。

2　自由場 2

2.1　頂点作用素

定義 2.1.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、

$$a_n |\lambda\rangle = 0 \ (n > 0), \quad a_n |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$$

となるベクトル $|\lambda\rangle$ で生成される $\mathcal{H}'$ の表現を**最高ウェイト** (または**電荷**) λ **の** *Fock* **空間**[*2]と呼び π_λ で表す。

π_λ は線形空間としては $\mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots] |\lambda\rangle$ と同型である。

補題 2.1.2. π_λ は π_0 と同様 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付けをもち、

$$\pi_\lambda = \oplus_{n\geq 0} \pi_\lambda(n), \quad \pi_\lambda(n) := \{v \in \pi_\lambda \mid \deg v = nv\}$$

と分解される。各 $\pi_\lambda(n)$ は以下の形の元からなる基底をもつ。

$$a_{-m}^{k_m} \cdots a_{-2}^{k_2} a_{-1}^{k_1} |\lambda\rangle, \quad \sum_{i=1}^{m} i k_i = n.$$

命題 2.1.3. π_λ は既約 $\mathcal{H}'$ 表現である

略証. 任意の $v \in \pi_\lambda$ について、a_n 達のある単項式 m があって $m \cdot v = |\lambda\rangle$ とできる。$|\lambda\rangle$ は $\mathcal{H}'$ を生成するから、任意の 2 元 $v, w \in \pi_\lambda$ に対しある $x \in U(\mathcal{H}')$ があって $x \cdot v = w$ となる。これは π_λ の既約性を意味する。 □

実は $\mathcal{H}'$ の既約表現は Fock 空間で尽くされる。正確には

事実 2.1.4. $\mathbb{Z}$ 次数付きでかつ次数が下に有界な**任意の既約** $\mathcal{H}'$ **表現**は、ある $\lambda \in \mathbb{C}$ があって π_λ と同型になる。

注意. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V, W の間の $\mathfrak{g}$ **準同型**とは線形写像 $f : V \to W$ であって $\mathfrak{g}$ の作用と整合的なもののことであった。即ち、$\rho_V : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ を V の表現写像、$\rho_W : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} W$ を W の表現写像とするとき、任意の $v \in V$ と $x \in \mathfrak{g}$ について

$$f\big(\rho_V(x)v\big) = \rho_W(x) f(v).$$

[*1] 2016/10/24 版, ver. 1.2.
[*2] 後で出てくる Clifford 代数の Fock 加群と区別するため、Heisenberg Fock 表現、ボソン (boson) Fock 表現などとも呼びます。

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ で V と W の間の $\mathfrak{g}$ 準同型全体のなす線形空間を表す。

補題 2.1.5. $\mathcal{H}''$ を a_n $(n \neq 0)$ の生成する部分 Lie 代数とする。$\mathcal{H}''$ 準同型[*3] $S_\lambda : \pi_\mu \to \pi_{\mu+\lambda}$ で次の条件を満たすものが一意に存在する。

$$S_\lambda(|\mu\rangle) = |\mu+\lambda\rangle$$

証明. レポート問題とする。 □

注意. $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}'$ の生成元 q を思い出す。定義関係式 $[a_0, q] = 1$ から、形式的だが等式

$$a_0 e^{\lambda q} |0\rangle = \lambda e^{\lambda q} |0\rangle$$

が得られる。ここで $e^{\lambda q} := \sum_{n \geq 0} \lambda^n q^n/n!$ とした。よって $e^{\lambda q}$ による掛け算は上の S_λ と思える。

定義 2.1.6. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、形式和 $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ を用いて**頂点作用素** $V_\lambda(z)$ を次の式で定義する。

$$V_\lambda(z) \;:=\; S_\lambda z^{\lambda a_0} \exp\bigl(-\lambda \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}\bigr) \exp\bigl(-\lambda \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}\bigr) \;=\; S_\lambda z^{\lambda a_0} : \exp\bigl(-\lambda \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n}\bigr) : .$$

π_ν への作用を考えると $V_\lambda(z)$ は $z^{\lambda\nu}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}''}(\pi_\nu, \pi_{\lambda+\nu})[[z^{\pm 1}]]$ の元と思える。より詳しく

補題 2.1.7. 任意の $v \in \pi_\nu$ に対し $V_\lambda(z) v \in z^{\lambda\nu} \pi_{\lambda+\nu}((z))$.

証明. レポート問題とする。 □

命題 2.1.8. 次の等号が成立する。

$$\begin{aligned} V_\lambda(z) V_\mu(w) &= z^{\lambda\mu}(1-w/z)^{\lambda\mu} : V_\lambda(z) V_\mu(w) : \\ &= z^{\lambda\mu}(1-w/z)^{\lambda\mu} S_\lambda S_\mu z^{\lambda a_0} w^{\mu a_0} : \exp\Bigl(-\sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n}(\lambda z^{-n} + \mu w^{-n})\Bigr) : . \end{aligned}$$

証明. $\varphi_+(z) := -\sum_{n<0} a_n z^{-n}/n$, $\varphi_-(z) := -\sum_{n>0} a_n z^{-n}/n$ とすれば

$$\begin{aligned} V_\lambda(z)V_\mu(w) \;&=\; z^{\lambda\mu} S_\lambda S_\mu z^{\lambda a_0} w^{\mu a_0} e^{\lambda\varphi_+(z)} e^{\lambda\varphi_-(z)} e^{\mu\varphi_+(w)} e^{\mu\varphi_-(w)}, \\ : V_\lambda(z)V_\mu(w) : \;&=\; S_\lambda S_\mu z^{\lambda a_0} w^{\mu a_0} e^{\lambda\varphi_+(z)} e^{\mu\varphi_+(w)} e^{\lambda\varphi_-(z)} e^{\mu\varphi_-(w)} \end{aligned}$$

なので、$e^{\lambda\varphi_-(z)} e^{\mu\varphi_+(w)}$ の項が問題である。定義関係式から

$$[\varphi_-(z), \varphi_+(w)] = -\sum_{n>0} \frac{[a_n, a_{-n}]}{n^2} \frac{w^n}{z^n} = -\sum_{n>0} \frac{1}{n} \frac{w^n}{z^n} = \log(1-w/z).$$

ここで最後の $\log(1-x)$ は形式和 $-\sum x^n/n$ のことである。すると Baker-Campbell-Hausdorff 公式より

$$e^{\lambda\varphi_-(z)} e^{\mu\varphi_+(w)} = e^{\lambda\mu[\varphi_-(z), \varphi_+(w)]} e^{\mu\varphi_+(w)} e^{\lambda\varphi_-(z)} = (1-w/z)^{\lambda\mu} e^{\mu\varphi_+(w)} e^{\lambda\varphi_-(z)}$$

ここで形式和に関する等式 $\exp(\log(1-x)) = 1-x$ を用いた。以上から結論が得られる。 □

この計算から合成 $V_\lambda(z)V_\mu(w)$ は $z^{\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}''}(\pi_\nu, \pi_{\lambda+\mu+\nu})[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ の元と思える。

定義 2.1.9. 線形空間 $V_{\mathbb{Z}}$ を次の式で定義する。

$$V_{\mathbb{Z}} := \oplus_{m\in\mathbb{Z}} \pi_m.$$

$V_{\pm 1}(z)$ を定義 2.1.6 で $\lambda = \pm 1$ としたものとする。これは $(\mathrm{End}\, V_{\mathbb{Z}})[[z^{\pm 1}]]$ の元と思える。

命題 2.1.10. $[f,g]_+ := fg + gf$ とすると、$(\mathrm{End}\, V_{\mathbb{Z}})[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ で以下の等式が成立する。

$$[V_{\pm 1}(z), V_{\pm 1}(w)]_+ = 0, \quad [V_1(z), V_{-1}(w)]_+ = \delta(z,w).$$

[*3] ver. 1.2 で訂正しました。

証明. 命題 2.1.8 から

$$V_1(z)V_{-1}(w) = z^{-1}(1-w/z)^{-1} : V_1(z)V_{-1}(w) :, \quad V_{\pm1}(z)V_{\pm1}(w) = (z-w) : V_{\pm1}(z)V_{\pm1}(w) :$$

となり、これらは $(\mathrm{End}\, V_{\mathbb{Z}})[[z^{\pm1}, w^{\pm1}]]$ での等式と思える。あとは $\delta(z,w) = z^{-1}(1-w/z)^{-1} + w^{-1}(1-z/w)^{-1}$ と $: AB : = : BA :$ より結論が得られる。 □

2.2 Clifford 代数

定義 2.2.1. (1) ψ_n, ψ_n^* $(n \in \mathbb{Z})$ と 1 を生成元とし、

$$\psi_m\psi_n + \psi_n\psi_m = \psi_m^*\psi_n^* + \psi_n^*\psi_m^* = 0, \quad \psi_m\psi_n^* + \psi_n^*\psi_m = \delta_{m+n,0}$$

を定義関係式とする (結合) 代数を *Clifford* **代数**と呼び $\mathcal{C}l$ とかく。

(2) $\mathcal{C}l$ の作用が

$$\psi_n \left|0\right\rangle = 0 \ (n \geq 0), \quad \psi_n^* \left|0\right\rangle = 0 \ (n > 0)$$

で与えられているベクトル $\left|0\right\rangle$ で生成される $\mathcal{C}l$ 加群を**フェルミオン** *Fock* **加群**と呼び $\bigwedge$ で表す。

注意. 超 Lie 代数 (Lie superalgebra) とは $\mathbb{Z}_2$ 次数 (パリティとも呼ぶ) 付き線形空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ と Lie 括弧と呼ばれる双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ で、任意の斉次元 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対し

$$[x,y] = (-1)^{|x|\,|y|}[y,x], \quad [x,[y,z]] = [[x,y],z] + (-1)^{|x|\,|y|}[y,[x,z]]$$

を満たすものの組 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ であった。ここで $|x| \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ は x の $\mathbb{Z}_2$ 次数を表す。$|x| = \bar{0}$ なる x を even 元、$|x| = \bar{1}$ なる x を odd 元と呼ぶ。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ の場合が通常の Lie 代数である。$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ の場合、$[\ ,\ ]$ を $[\ ,\ ]_+$ とかく。

上記の代数 $\mathcal{C}l$ は、ψ_n, ψ_n^* を odd 元とする Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ の普遍包絡代数である。Lie 代数の言葉にあわせて、$\bigwedge$ を $\mathfrak{g}$ の Fock 表現と呼ぶこともある。

補題 2.2.2. $\bigwedge$ は次の形の元からなる基底を持つ。

$$\psi_{n_1} \cdots \psi_{n_k} \psi_{m_1}^* \cdots \psi_{m_l}^* \left|0\right\rangle \quad (k, l \geq 0,\ n_1 < n_2 < \cdots < n_k < 0,\ m_1 < m_2 < \cdots < m_l \leq 0).$$

この元の $\mathbb{Z}_2$ 次数 (パリティ) を $(l-k) \mod 2$ と定めることで、$\bigwedge$ は $\mathbb{Z}_2$ 次数付き線形空間になる。また別に $\mathbb{Z}$ 次数を $\deg := -\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{l} m_j$ で定めることで $\bigwedge$ には $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付け線形空間の構造が入る。

命題 2.2.3. $\bigwedge$ は既約 $\mathcal{C}l$ 加群である。

証明. 各 $v \in \bigwedge$ に対し ψ_n と ψ_n^* の単項式 m が存在して $m \cdot v = \left|0\right\rangle$ となる。$\left|0\right\rangle$ は $\bigwedge$ を生成するので、任意の 2 元 $v, w \in \bigwedge$ に対しある $x \in \mathcal{C}l$ があって $c \cdot v = w$ となる。これは $\bigwedge$ の既約性を意味する。 □

定義 2.2.4. $(\mathrm{End} \bigwedge)[[z^{\pm1}]]$ の元 $\psi(z), \psi^*(z)$ を次の式で定義する。

$$\psi(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n z^{-n-1}, \quad \psi^*(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^* z^{-n}$$

補題 2.2.5. $\psi(z), \psi^*(z)$ は $\bigwedge$ 上の場である。

$\bigwedge$ 上の場 $f(z)$ と $g(w)$ について $[f(z), g(w)]_+ := f(z)g(w) + g(w)f(z)$ と定義する。

命題 2.2.6. $(\mathrm{End} \bigwedge)[[z^{\pm1}, w^{\pm1}]]$ において以下の等式が成立する。

$$[\psi(z), \psi(w)]_+ = [\psi^*(z), \psi^*(w)]_+ = 0, \quad [\psi(z), \psi^*(w)]_+ = \delta(z,w).$$

証明. 省略する。 □

局所性の定義を少し変更する必要がある。

定義 2.2.7. odd な場 $A(z), B(w)$ が局所的であるとは、ある非負整数 N があって次の等式が $(\operatorname{End} V)[[z,w]]$ で成立することと定義する。

$$(z-w)^N [A(z), B(w)]_+ = 0$$

この定義により $\psi(z)$ と $\psi^*(z)$ は odd な場として互いに局所的である。

注意. この節で導入した場は $b(z) = \psi(z)$ 及び $c(z) = \psi^*(z)$ とも書き、bc **系**と呼ばれる。

2.3 Boson-Fermion 対応

命題 2.1.10 と命題 2.2.6 を見比べると、対応

$$V_1(z) \longmapsto \psi^*(z), \quad V_{-1}(z) \longmapsto \psi(z) \tag{2.1}$$

で同じ反交換式が現れている。以下 $|0\rangle \in \bigwedge$ を $|0\rangle_F$ と書いて $|0\rangle \in V_{\mathbb{Z}}$ と区別する。

命題 2.3.1. (1) $V_{\mathbb{Z}}$ は (2.1) により $\mathcal{C}l$ 加群とみなせる。

(2) $\mathcal{C}l$ 加群の準同型 $\rho : \bigwedge \to V_{\mathbb{Z}}$ が $\rho(|0\rangle_F) := |0\rangle$ から一意に定まる。

(3) ρ は $\mathcal{C}l$ 加群としての同型を与える。

なお頂点代数の概念を導入すると、この命題は次のようにまとめられる。

定理. 頂点超代数の同型 $V_{\mathbb{Z}} \simeq \bigwedge$ が存在する。

証明. (1) 代数準同型 $\mathcal{C}l \to \operatorname{End}(V_{\mathbb{Z}})$ を $\psi^*(z) \mapsto V_1(z)$ 及び $\psi(z) \mapsto V_{-1}(z)$ で定義できる。より詳しく言うと、

$$V_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n^* z^{-n}, \quad V_{-1}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-1}$$

で $\phi_n, \phi_n^* \in \operatorname{End}(V_{\mathbb{Z}})$ を定義すると、$V_{\pm1}(z)$ が $\psi^*(z)$,$\psi(z)$ と同じ関係式を満たすことから

$$[\phi_n, \phi_m]_+ = [\phi_n, \phi_m]_+ = 0, \quad [\phi_n, \phi_m^*]_+ = \delta_{n+m,0}$$

がわかる。これは $\mathcal{C}l$ の定義関係式なので、$V_{\mathbb{Z}}$ に $\mathcal{C}l$ 加群の構造が入ったことになる。

(2) $V_{\pm1}(z)$ の定義から

$$\phi_n |0\rangle = 0 \ (n \geq 0), \quad \phi_n^* |0\rangle = 0 \ (n > 0)$$

が従うが、これは $|0\rangle_F \in \bigwedge$ と同じ条件なので、$\mathcal{C}l$ 加群の準同型 $\rho : \bigwedge \to V_{\mathbb{Z}}$ が $\rho(|0\rangle_F) = |0\rangle$ で定まる。

(3) $\bigwedge$ は命題 2.2.3 より既約なので ρ は単射である。全射性を示すのに、まず $V_{\pm1}(z)$ の定義式から

$$\rho\big(\psi_{-n}\psi_{-n+1}\cdots\psi_{-1} |0\rangle_F\big) = |-n\rangle, \quad \rho\big(\psi^*_{-n+1}\psi^*_{-n+2}\cdots\psi^*_0 |0\rangle_F\big) = |n\rangle \tag{2.2}$$

が $n \geq 0$ で成り立つことが分かる。更に

$$\rho\big({}^\circ_\circ \psi^*(z)\psi(z) {}^\circ_\circ\big) = a(z) \tag{2.3}$$

も分かる。但し

$${}^\circ_\circ \psi^*(z)\psi(w) {}^\circ_\circ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{m<0} \psi^*_{m+1}\psi_n z^{-m-1} - \sum_{m\geq 0} \psi_n \psi^*_{m+1} z^{-m-1} \Big) w^{-n-1}.$$

$V_{\mathbb{Z}} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n$ の任意の元は $|n\rangle$ から a_m 達で生成されるので、全射性が従う。

まず (2.2) の前半を n に関する帰納法で示す。後半は同様なので略す。$n=1$ なら

$$\rho(\psi_{-1} |0\rangle_F) = \Big(V_{-1}(z) |0\rangle \text{ の } z^0 \text{ の項} \Big)$$

$$= \Bigl(S_{-1} z^{a_0} : \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\neq 0} a_n z^{-n}/n\bigr) : |0\rangle \text{ の } z^0 \text{ の項}\Bigr) = S_{-1}\,|0\rangle = |-1\rangle\,.$$

$n+1$ の時は

$$\begin{aligned}\rho\bigl(\psi_{-n}\psi_{-n+1}\cdots\psi_{-1}\,|0\rangle_F\bigr) &= \Bigl(S_{-1} z^{a_0} : \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\neq 0} a_n z^{-n}/n\bigr) : |-n\rangle \text{ の } z^n \text{ の項}\Bigr)\\ &= \Bigl(S_{-1} : \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\neq 0} a_n z^{-n}/n\bigr) : |-n\rangle \text{ の } z^0 \text{ の項}\Bigr) = S_{-1}\,|-n\rangle = |-n-1\rangle\,.\end{aligned}$$

(2.3) はレポート問題 10(2) を参照。 □

参考書

山田泰彦「共形場理論」(培風館) の §§2.6–2.7 および
Frenkel, Ben-Zvi, “Vertex algebras and algebraic curves” (AMS) の §§5.2–5.3。

以上です。