2016 年度後期　数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 17 日分のレポート問題

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎

以下の問題のうち **1 題以上**を解いて提出して下さい。期限は**次回 10 月 24 日（月）の講義まで**です。
各問題の $\star$ は難易度を示しています。$\star$1 つを 5 点前後として採点する予定です。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 1 ($\star\star\star$ PBW 基底)**.** Lie 代数の普遍包絡代数の PBW(Poincaré-Birkoff-Witt) 基底とは何か述べ、その存在定理の証明を与えよ。

レポート問題 2 ($\star$ Fock 表現の Hilbert 級数)**.** Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ の Fock 表現 π_0 の次数構造

$$\pi_0 = \oplus_{n\geq 0}\pi_0(n), \quad \pi_0(n) := \{v \in \pi_0 \mid \deg(v) = n\}$$

について、次の等式を示せ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \dim \pi_0(n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}.$$

レポート問題 3 ($\star$ 形式的デルタ関数)**.** $\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n w^{-n-1} \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ に関する以下の命題を示せ。

(1) 任意の $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ との積 $f(z)\delta(z,w) \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ が定義される。
(2) 任意の $f(z) \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$ について等式 $f(z)\delta(z,w) = f(w)\delta(z,w)$ が $\mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ で成り立つ。
(3) 任意の非負整数 n について等式 $(z-w)^{n+1}\partial_w^n \delta(z,w) = 0$ が $\mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ で成り立つ。

レポート問題 4 ($\star\star$ Virasoro 代数のボソン化)**.** Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ の正規積 $:\,:$ を用いて次の無限和を定める。

$$L_n := \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} : a_m a_{n-m} : .$$

(1) 関係式 $[a_n, L_m] = n a_{n+m}$ を導け。
(2) 次の関係式を導け。

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}.$$

(3) $T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とすると次の関係式が成り立つことを示せ。

$$[T(z), T(w)] = \frac{1}{12}\partial_w^3\delta(z,w) + 2T(w)\partial_w\delta(z,w) + \partial_w T(w)\cdot\delta(z,w).$$

レポート問題 5 ($\star\star\star$ 対称化写像と Bernoulli 数)**.** $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の Lie 環とし、$[\,,\,]$ でその Lie 括弧を記す。$T(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の線形空間としてのテンソル代数、また $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数とする。射影写像 $T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ を π で表す。例えば $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し $[X,Y] = \pi(XY - YX)$ が成立する。対称化写像 $\sigma : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ を次の式で定義する。

$$\sigma(X_1 \cdots X_n) := \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} X_{\tau(1)}\cdots X_{\tau(n)}.$$

σ と π の合成を次のように書く。

$$(X_1, \ldots, X_n) := \pi\big(\sigma(X_1\cdots X_n)\big) \in U(\mathfrak{g}).$$

この時 $Y, X_1, \ldots, X_n \mathfrak{g}$ に対して、$U(\mathfrak{g})$ において次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} Y(X_1,\ldots,X_n) = (Y, X_1, \ldots, X_n) &- \frac{b_1}{1!}\sum_i([Y,X_i], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n) \\ &+ \frac{b_2}{2!}\sum_{i\neq j}([[Y,X_i],X_j], X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_n) - \cdots . \end{aligned} \tag{5.1}$$

但し $b_1 = -1/2,\ b_2 = 1/6,\ \ldots$ は Bernoulli 数であり、また $\widehat{X}_i$ は X_i を除くことを意味する。この問題は等式 (5.1) を証明することを目的とする。

(1) $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し、$T(\mathfrak{g})$ において次の等式が成立することを示せ。

$$\sigma(YX^m) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} X^k Y X^{m-k}$$

また m についてこの式をまとめて、次の式が得られることを示せ。

$$\sigma(Ye^X) = \sum_{k,m\geq 0} \frac{1}{(k+m+1)!} X^k Y X^m. \tag{5.2}$$

（両辺とも無限和なので、正確には $T(\mathfrak{g})$ を適切に完備化した空間で考える必要がありますが、それについては余裕があれば考えてみて下さい。）

(2) $k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次の式が成立することを示せ。

$$\frac{1}{(k+m+1)!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!\,(m-j)!}\frac{(-1)^j}{k+j+1}. \tag{5.3}$$

（ヒント：ベータ関数の積分表示と 2 項定理から $m!\,k!/(m+k+1)!$ を有理数の和で表示すると示せます。）

(3) $\nabla : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ を $\nabla(Y) := XY - YX$ で定める。等式 (5.2) と (5.3) から次の等式を導け。

$$\sigma(Ye^X) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!}\nabla^m(Y)\Big)e^X.$$

またこの式を

$$\sigma(Ye^X) = \frac{e^{\nabla}-1}{\nabla}(Ye^X)$$

と書き換え、それから次の式が得られる。

$$\frac{\nabla}{e^{\nabla}-1}\sigma(Ye^X) = Ye^X. \tag{5.4}$$

ここで現れた $(e^{\nabla}-1)/\nabla$ 及び $\nabla/(e^{\nabla}-1)$ をどの様に考えればよいか（又はそれらの定義を）議論せよ。

(4) $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $\ldots$ を冒頭で述べた Bernoulli 数として、等式 (5.4) から $T(\mathfrak{g})$ での次の等式を導け。

$$\frac{1}{n!}YX^n = \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{(n-k)!}\nabla^k(\sigma(YX^m)).$$

（ヒント：Bernoulli 数の母函数を思い出して (5.4) と見比べて下さい。）

(5) $\mathrm{ad}_X(-) := [X, -]$ として、$U(\mathfrak{g})$ での次の等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}YX^n = \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{(n-k)!}\big(\overbrace{X, \ldots, X}^{n-k}, \mathrm{ad}_X^k(Y)\big). \tag{5.5}$$

(6) (5.5) から冒頭の等式 (5.1) を導け。

出典について

問題 5 は [D77, P98 2.8.12(c)] にある公式で、[G71, Lemma 2.1] の証明に沿った誘導をつけました。

参考文献

[D77] Dixmier, J., *Enveloping algebras*, Revised reprint of the 1977 translation, Graduate Studies in Mathematics, **11**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[G71] Goodman, R., *Differential operators of finite order on a Lie group, II*, Indiana Math. J. **21** (1971) 383–409.

以上です。