2016 年度後期　数理物理学 (概論)　10 月 17 日分レポートの解答[*1]

理学部 A-441 号室　柳田伸太郎

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 1 ($\star\star\star$ PBW 基底). Lie 代数の普遍包絡代数の PBW(Poincaré-Birkoff-Witt) 基底とは何か述べ、その存在定理の証明を与えよ。

略解. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $B=\{x_i \mid i \in I\}$ とその添字集合 I 上の全順序 $\succcurlyeq$ が与えられたとする。この時 $\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_\ell} \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ i_1 \succcurlyeq i_2 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq i_\ell\}$ は普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の基底になる。この基底のことを ($(B,\succcurlyeq)$ に関する)PBW 基底と呼ぶ。

解説. 定理の証明は省略しました。Lie 代数の教科書を参考にして下さい。

普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は非可換代数で生成元 (この場合 $\mathfrak{g}$ の基底) と関係式が与えられており、その基底を明示的に挙げているのが問題の定理です。実はより一般の非可換代数でも同様の定理が (ある条件のもと) 成り立つことが

Bergman, George M. *The diamond lemma for ring theory*, Adv. in Math. **29** (1978), no. 2, 178–218.

で示されています。

レポート問題 2 ($\star$ Fock 表現の Hilbert 級数). Heisenberg 代数 $\mathcal{H}'$ の Fock 表現 π_0 の次数構造

$$\pi_0 = \oplus_{n\ge 0}\pi_0(n), \quad \pi_0(n) := \{v \in \pi_0 \mid \deg(v)=n\}$$

について、次の等式を示せ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \dim \pi_0(n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}.$$

解答. $\pi_0(n)$ は $\pi_{-\lambda_1}\pi_{-\lambda_2}\cdots\pi_{-\lambda_\ell}|0\rangle$, ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\lambda_i \le \lambda_{i+1}$, $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i = n$) の形の元からなる基底を持つことから、$\dim \pi_0(n)$ は n の分割数と一致する。よって等式の左辺は分割数の母函数なので右辺と等しい。

レポート問題 3 ($\star$ 形式的デルタ関数). $\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n w^{-n-1} \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ に関する次の主張を示せ。

(1) 任意の $f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k \in \mathbb{C}[[z^{\pm1}]]$ との積 $f(z)\delta(z,w) \in \mathbb{C}[[z^{\pm1},w^{\pm1}]]$ が定義される。

(2) 任意の $f(z) \in \mathbb{C}[[z^{\pm1}]]$ について等式 $f(z)\delta(z,w)=f(w)\delta(z,w)$ が $\mathbb{C}[[z^{\pm1},w^{\pm1}]]$ で成り立つ。

(3) 任意の非負整数 n について等式 $(z-w)^{n+1}\partial_w^n \delta(z,w)=0$ が $\mathbb{C}[[z^{\pm1},w^{\pm1}]]$ で成り立つ。

解答. (1) $\delta(z,w)=\sum_{l\in\mathbb{Z}} z^{-l-1}w^l$ より $f(z)\delta(z,w)=\sum_{k,l} f_k z^{k-l-1}w^l$ の $z^m w^n$ の係数は $f_{n+m+1}\in\mathbb{C}$ と有限の値に確定する。よって積 $f(z)\delta(z,w)$ が定義できる。

(2) $\delta(z,w)=\sum_{l\in\mathbb{Z}} z^l w^{-l-1}$ より $f(w)\delta(z,w)=\sum_{k,l} f_k w^{k-l-1}z^l$ となるので、$z^m w^n$ の係数は f_{m+n+1} と (1) での係数と一致する。

(3) 問 (2) で $f(z)=z$ として $z\delta(z,w)=w\delta(z,w)$ となり、これから $(z-w)\delta(z,w)=0$、即ち $n=0$ の場合が出る。この式を w で微分して $\delta(z,w)=(z-w)\partial_w\delta(z,w)$ を得るが、辺々 $(z-w)$ をかけて $n=2$ の場合が出る。一般の n の場合も同様に微分と帰納法で出る。

解説. 両側無限級数 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^n$ と $g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n z^n$ の積は一般には定義できません。実際 $\sum_{m,n} f_n g_m z^{m+n} = \sum_k z^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n g_{k-n}$ より z^k の係数は無限和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n g_{k-n}$ になってしまい、何の条件もないと意味を持ちません。2 変数以上の級数も同様に一般には積は定義できません。この講義の主な対象である頂点代数は大雑把には「作用素の級数の集合」なのですが、それらの合成 (ないし積) を定義しようとすると無限級数の積の問題を避けることができません。形式的デルタ関数はその問題をうまく避けるため役割を果たしています。

以上です。

[*1] 10 月 24 日版, ver 0.1.