2016 年度後期 数理物理学 II/数理物理学概論 II　10 月 17 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1　自由場 1

無限次元 Lie 代数の代表例である Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ とその基本的な表現である Fock 表現を導入する。これらは相互作用のないボソン的な場 (自由ボソン場) を表している、というのが物理的な由来である。これらが数学的に重要な理由の一つは、頂点代数の基本的な例を与えるからである。

Lie 代数とその表現に関する基本概念は既知とするが、必要に応じて思い出していく。

断らない限り基礎体は $\mathbb{C}$ とする。$\mathbb{C}$ 上の代数 R について、$R[[z]]$ で R 係数の形式的級数 $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ のなす線形空間を表す。また $R[[z^{\pm 1}]]$ で R 係数の両方向形式的級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ のなす線形空間を表す。同様に、$R[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ は級数 $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} z^n w^m$ のなす線形空間を表す。

1.1　Heisenberg 代数と Fock 表現

定義 1.1.1. a_n ($n \in \mathbb{Z}$) と q および 1 を生成元とし、以下の式を定義関係式とする Lie 代数を $\mathcal{H}$ で表し ***Heisenberg* 代数**と呼ぶ。

$$[a_n, q] = \delta_{n,0}, \quad [a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$$

注意. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ とは、$\mathfrak{g}$ のテンソル代数

$$T(\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \cdots$$

の両側イデアル

$$I := \langle a \otimes b - b \otimes a - [a.b] \mid a, b \in \mathfrak{g}\rangle$$

による商代数

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$$

であった。自然な埋め込み写像 $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ があることにも注意する。

$(U(\mathfrak{g}), i)$ は次の普遍性を持つ：任意の (結合的) 代数 A と任意の線形写像 $i' : \mathfrak{g} \to A$ に対し、代数準同型 $f : U(\mathfrak{g}) \to A$ があって $f \circ i = i'$ となる。

補題 1.1.2. $\mathcal{H}$ の普遍包絡代数 $U(\mathcal{H})$ は以下の形の元からなる基底をもつ。

$$q^k a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_\ell} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_i \in \mathbb{Z},\ n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\ell).$$

証明. 省略する（レポート問題 1 を参照)。 □

注意. ($\mathbb{Z}$-) 次数付き Lie 代数 (graded Lie algebra) $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, [\,,\,])$ とは、Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ に線形空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$ があり、Lie 括弧がそれと整合的、つまり次が任意の $i, j \in \mathbb{Z}$ で成立することをいうのであった。

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}.$$

補題 1.1.3. $\mathcal{H}$ は (従って $U(\mathcal{H})$ も)

$$\deg(a_n) := -n, \quad \deg(q) = 0$$

とすることで $\mathbb{Z}$-次数付けを持つ。

証明. 定義関係式から明らかに Lie 括弧は deg と整合的である。 □

[*1] 2016/10/24 版, ver. 1.2

以下 a_n 達の生成する $\mathcal{H}$ の部分 Lie 代数（つまり q を忘れたもの）を $\mathcal{H}'$ と書く。

定義 1.1.4. $\mathcal{H}'$ の表現 π_0 を、

$$\pi_0 := \mathbb{C}\langle a_{-1}, a_{-2}, \ldots\rangle\,|0\rangle = \mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots]\,|0\rangle\,,$$
$$a_n \cdot |0\rangle = 0 \ (n \geq 0)$$

及び a_n $(n < 0)$ の $|0\rangle$ への作用は自由なものとして定める。π_0 を $\mathcal{H}'$ の**最高ウェイト 0 の** *Fock* **表現**[*2]と呼ぶ。

補題 1.1.5. π_0 は以下の形の元からなる基底をもつ。

$$a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_\ell}\,|0\rangle \quad (\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_i \in \mathbb{Z},\ n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\ell < 0).$$

証明. 補題 1.1.2 から従う。 □

注意. 次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$ の次数付き表現とは、Lie 代数としての表現 V に直和分解 $V = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ があり、それが $\mathfrak{g}$ の次数構造と整合的、つまり次が成立することをいうのであった。

$$\mathfrak{g}_i \cdot V_j \subset V_{i+j}.$$

補題 1.1.6.

$$\deg\left(a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_\ell}\,|0\rangle\right) := -\textstyle\sum_{i=1}^{\ell} n_i$$

と定めることで、π_0 は次のように直和分解される。

$$\pi_0 = \oplus_{n\geq 0}\pi_0(n), \quad \pi_0(n) := \{v \in \pi_0 \mid \deg(v) = n\}.$$

またこの次数付けにより π_0 は次数付き Lie 代数 $\mathcal{H}'$ の次数付き表現になる。

証明. 前半は補題 1.1.5 から従う。後半は

$$\deg(a_n \cdot v) = -n + \deg(v), \quad \deg(q \cdot v) = \deg(v) \tag{1.1}$$

が任意の $v \in \pi_0$ に対して成り立つことから従う。 □

1.2 Fock 表現上の場

定義 1.2.1. z を形式的変数とする以下の級数を考える。

$$a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \ \in (\mathrm{End}\,\pi_0)[[z^{\pm 1}]].$$

補題 1.2.2. 任意の $v \in \pi_0$ に対しある自然数 N があって、$n > N$ なら $a_n v = 0$. 特に任意の v に対し

$$a(z) \cdot v \in \pi_0((z)).$$

証明. (1.1) より $n < -\deg(v)$ なら $\deg(a_n \cdot v) < 0$ となり、これから $a_n v = 0$ が従う。 □

定義 1.2.3. V を線形空間とする。$(\mathrm{End}\,V)[[z^{\pm 1}]]$ の元 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}$ $(f_n \in \mathrm{End}\,V)$ は、任意の $v \in V$ に対し次の条件を満たすとき V **上の場** (field on V) と呼ばれる。

$$f(z) \cdot v \in V((z)).$$

補題 1.2.2 より

命題 1.2.4. $a(z)$ は π_0 上の場である。

[*2] 電荷 0 の Fock 表現とも呼びます。

補題 1.2.5. 線形空間 V 上の場 $f(z)$ の微分 $\partial f(z)$ 及び高階微分 $\partial^k f(z)$ $(k \geq 2)$ を次のように定義する。

$$\partial^k f(z) := \partial_z^k f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \partial_z^k (z^{-n-1}) \in (\mathrm{End}\, V)[[z^{\pm 1}]].$$

この時 $\partial^k f(z)$ も V 上の場である。

証明. 省略する。 □

特に $a'(z) := \partial a(z)$ は π_0 上の場である。しかし

補題.

$$a(z)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} \sum_{k+l=n} a_k a_l$$

は π_0 上の場ではない。

証明. $n = 0$ の項をみると、$\mathrm{End}(\pi_0)$ の元*3として

$$\textstyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k a_{-k} = \sum_{k>0} a_k a_{-k} + \sum_{k \geq 0} a_{-k} a_k = \sum_{k>0} (a_{-k} a_k + k) + \sum_{k \geq 0} a_{-k} a_k$$

となり、発散する項 $\sum_{k>0} k$ が現れる。 □

この問題を回避する方法が古典的に知られている。

定義 1.2.6. $U(\mathcal{H})$ 上の線形変換 $: :$ を以下のように (帰納的に) 定め、**正規積**と呼ぶ。*4

$$\begin{aligned} &: a_{-n} F : = : F a_{-n} : = a_{-n} : F :, \quad : a_n F : = : F a_n : = : F : a_n \quad (n > 0, F \in U(\mathcal{H})), \\ &: a_0 F : = : F a_0 : = : F : a_0, \quad : qF : = : Fq : = q : F :, \quad : 1 : = 1. \end{aligned}$$

注意. (1) 簡単に言うと、$U(\mathcal{H})$ の単項式 F の正規積 $: F :$ は F に含まれる生成元を並べなおして

$$\big(a_{-n}\ (n > 0) \text{ と } q \text{ の式}\big) \times \big(a_n\ (n \geq 0) \text{ の式}\big)$$

の形にする操作である。

(2) この操作は $U(\mathcal{H})$ の次数を保つことに注意する。

(3) 厳密には well-defined であることを議論する必要があるが、省略する。

例.

$$: a_n a_m : = \begin{cases} a_n a_m & (n \leq m) \\ a_m a_n & (n > m) \end{cases}$$

命題 1.2.7.

$$: a(z)^2 : = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} \sum_{k+l=n} : a_k a_l :$$

は π_0 上の場である。

証明. z^{-n-2} の係数を b_n と置くと

$$\textstyle b_n := \sum_{k+l=n} : a_k a_l : = \sum_{k \geq 0} a_{n-k} a_k + \sum_{k<0} a_k a_{n-k}$$

なので、$v \in V$ について $n > \deg(v)$ なら $a_k a_{n-k} \cdot v = a_{n-k} a_k \cdot v = 0$ 即ち $b_n v = 0$ である。 □

命題 1.2.8.

$$: \partial^{n_1} a(z)\, \partial^{n_2} a(z) \cdots \partial^{n_k} a(z) :$$

も π_0 上の場である。

証明. 同様なので省略する。 □

---

*3 無限和なので正確ないい方ではありません。
*4 ver1.2 で q に関するルールを訂正しました。

1.3 場の局所性

次の $(\operatorname{End}\pi_0)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ の元を考えよう。

$$a(z)a(w) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n a_m z^{-n-1}w^{-m-1}, \quad :a(z)a(w): = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} :a_n a_m: z^{-n-1}w^{-m-1}.$$

命題 1.3.1. $(\operatorname{End}\pi_0)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ において次の等式が成立する。

$$a(z)a(w) = \sum_{n>0} nz^{-n-1}w^{n-1} + :a(z)a(w):.$$

証明. $a_n a_m \neq :a_n a_m:$ となるのは $n = -m > 0$ の時に限るので、

$$a(z)a(w) - :a(z)a(w): = \textstyle\sum_{n\geq 0}[a_n, a_{-n}]z^{-n-1}w^{n-1} = \sum_{n\geq 0} nz^{-n-1}w^{n-1}.$$

□

また $:a_n a_m: = :a_m a_n:$ から $:a(z)a(w): = :a(w)a(z):$ が $\operatorname{End}(\pi_0)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ で成立する。従って

$$a(z)a(w) - a(w)a(z) = \sum_{n>0} nz^{-n-1}w^{n-1} - \sum_{n>0} nw^{-n-1}z^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nz^{-n-1}w^{n-1}.$$

定義 1.3.2. **形式的デルタ関数** $\delta(z,w) \in \mathbb{C}[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ を次のように定義する。

$$\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n w^{-n-1}.$$

π_0 上の場の交換子を

$$[f(z), g(w)] := f(z)g(w) - g(w)f(z)$$

で定義すると、上の計算から直ちに

補題 1.3.3. $\operatorname{End}(\pi_0)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ において $[a(z), a(w)] = \partial_w \delta(z,w)$.

ところで

補題 1.3.4. 任意の非負整数 n について $(z-w)^{n+1}\partial_w^n \delta(z,w) = 0$.

証明. 省略する（レポート問題 3 を参照)。 □

従って

命題 1.3.5. $(z-w)^2[a(z), a(w)] = 0$.

そこで次の概念を導入する。

定義 1.3.6. 線形空間 V 上の場 $A(z)$ と $B(z)$ が**局所的** (local) であるとは、ある非負整数 N があって次式が成り立つことをいう。

$$(z-w)^N[A(z), B(w)] = 0 \qquad \big((\operatorname{End}V)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]] \text{ において}\big).$$

命題 1.3.7. $\partial^n a(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は互いに局所的である。

証明. 命題 1.3.5 を微分すればよい。 □

参考書

山田泰彦「共形場理論」培風館 の §§1.1–1.4 と §§2.1–2.2、もしくは
Frenkel, Ben-Zvi, “Vertex algebras and algebraic curves” AMS の §§1.1–1.2 と §§2.1–2。

以上です。